Risikofri rente- og risikopremiemysteriet

Masteroppgave i økonomisk analyse

Erik Hetland Tvedt

Veileder

Professor Knut K. Aase

NHH

Norges Handelshøyskole

Bergen, våren 2010

Risikofri rente- og risikopremiemysteriet

Erik Hetland Tvedt

16. juni 2010

Sammendrag

Første del av oppgaven gir en generell presentasjon av standard teori rundt forventet nytte, risikoaversjon samt aktivaprising i én og flere perioder. Andre del av oppgaven setter denne teorien i sammenheng med risikopremiemysteriet til Mehra og Prescott. Deretter blir noen av forslagene til løsning presentert og gjennomgått.

Innhold

Figurer

Tabeller

Kapittel 1

Innledning

Avkastningen i det amerikanske aksjemarkedet har vært meget høy de siste 120 årene. Utover på 1970-tallet fikk vi teori som under visse forutsetninger kunne si hva avkastningen i aksjemarkedet og den risikofrie renten 'burde' være, uttrykt med mer fundamentale størrelser. Mehra og Prescott (1985) anvendte denne teorien på tall fra USA og fant at her er det noe som ikke stemmer. Dette er ikke unikt for USA, og man finner samme mønster i de fleste andre land også. Modellen kan rett og slett ikke forklare høy risikopremie, lav og stabil risikofri rente samtidig som veksten i konsum har vært omfattende og stabil. Dette er en modell som i utgangspunktet er veldig fornuftig og som det i så måte ikke er noen grunn til å forkaste.

1.1 Forventet nytte og risikoaversjon

Vi kan ikke si særlig mye om aktivaprisning hvis vi ikke kan si noe om hvordan en person vil rangere ulike aktiva i forhold til hverandre. Et minstekrav til en slik teori er at valgene man får ut virker fornuftige og at agenten opptrer rasjonelt. Ulike valg rangeres med preferanserelasjonene $\succ$, $\sim$ og $\succeq$. Dersom en agent synes a er minst like god som b, uttrykkes dette $a \succeq b$, $a \succ b$ dersom a er ekte bedre enn b og $a \sim b$ hvis vedkommende er indifferent. For at valgene skal være fornuftig, må de oppfylle følgende aksiomer:

- **Kompletthet**: For to vilkårlige valgmuligheter a og b, krever vi at $a \succ b$, $b \succ a$ eller $a \sim b$. Dette betyr at agenten må innta et standpunkt, vedkommende har lov til å si at hun er indifferent, men hun har ikke lov til å si at hun ikke vet. Dersom vi har mange forholdsvis like alternativer, kan det kanskje være vanskelig å rangere disse, men for at teorien skal bli anvendelig må vi anta at en agent vet hva som er best for seg selv.

- **Transitivitet**: Dersom agenten inntar standpunktene $a \succeq b$ og $b \succeq c$, så medfører dette at også $a \succeq c$. At valgmuligheter ikke kan slå hverandre i ring er fornuftig når det kommer til konsum, dersom man foretrekker kake fremfor kjeks, kjeks fremfor brød, så bør man også foretrekke kake fremfor brød.

- **Kontinuitet**: Dersom $a \succeq b \succeq c$ så finnes det en $\lambda \in [0; 1]$ slik at $\lambda a + (1 - \lambda)c \sim b$. En liten endring i sammensetningen kan derfor ikke medføre store endringer i rangeringen.

Det siste punktet er mest en teoretisk antagelse, hvis alle disse punktene er oppfylt, kan man nemlig definere en kontinuerlig nyttefunksjon $u(\,\cdot\,)$ som har egenskapene $a \succ b \iff u(a) > u(b)$ og $a \sim b \iff u(a) = u(b)$. Dette er en stor fordel, da det er mye lettere å jobbe med kontinuerlige funksjoner enn med preferanserelasjoner. Disse aksiomene er tilstrekkelig for å kunne håndtere valg uten usikkerhet, for å få usikkerhet med trenger vi imidlertid to aksiomer til. Vi skal nå se på a, b og c som lotterier som gir et usikkert fremtidig utfall.

- **Uavhengighet**: Hvis $a \succ b$ så vil også $\lambda a + (1 - \lambda)c \succ \lambda b + (1 - \lambda)c$ for alle lotterier c og $\lambda \in (0; 1]$. Dette sier at vår vurdering av lotterer ikke skal påvirkes av hvordan vi har fått det. Hvis vi foretrekker lotteri a fremfor lotteri b, og vi kommer i en situasjon hvor vi får velge mellom lotteri a og b i en tilstand som inntreffer med sannsynlighet λ og hvis ikke denne tilstanden inntreffer så får vi lotteri c uansett, så skal vi på forhånd kunne si at vi vil ha lotteri a dersom tilstanden med valgmuligheten inntreffer.

- **Dominans**: Hvis vi setter sammen lotteriene b og c på to forskjellige måter, nemlig $a_1 = \lambda_1 b + (1 - \lambda_1)c$ og $a_2 = \lambda_2 b + (1 - \lambda_2)c$, og vi vet at $b \succ c$ så vil $a_1 \succ a_2$ hvis og bare hvis $\lambda_1 \succ \lambda_2$.

Dersom en agent handler på en slik måte at alle disse aksiomene er oppfylt, kan man vise at vedkommende handler *som om* hun maksimerer forventet nytte. Selv om noen av disse aksiomene kan virke strenge, og dette gjelder kanskje spesielt aksiomet om uavhengighet, er bruken av dette rammeverket omfattende.

Mye konsum gir større nytte enn lite konsum, så alle fornuftige nyttefunksjoner er voksende, hvilket medfører at $u'(\,\cdot\,) > 0$. En agent er itillegg risikoavers dersom vedkommende heller vil ha forventingen til et lotteri x enn lotteriet selv. Dette betyr at forventet nytte av å få det usikre utfallet fra lotteriet er lavere enn nytten av forventingen:

$$E[u(x)] < u(E[x])$$

Jensens ulikhet sier at dette kun er oppfylt dersom $u(\,\cdot\,)$ er en konkav funksjon. Siden risikoaversjon er noe som i praksis kjennertegner alle rasjonelle beslutningstagere, er gruppen gangbare nyttefunksjoner redusert til de som tilfredsstiller både $u'(\,\cdot\,) > 0$ og $u''(\,\cdot\,) < 0$. Dette betyr at dersom vi får konsum for én krone ekstra vil dette føre til at nytten blir økt, og dersom vi får enda en krone ekstra vil nytten fortsatt øke, men ikke like mye som med den første ekstrakronen vi fikk.

Nyttefunksjoner blir kun brukt til å rangere ulike valg, nyttenivået i seg selv sier oss ingenting. Nyttefunksjonen $u(\,\cdot\,)$ og $au(\,\cdot\,) + b$ gir derfor opphav til de nøyaktig samme valgene dersom $a > 0$, og dette vil vi at et mål på risikoaversjon skal ta hensyn til. Arrow-Pratts mål på risikoaversjon tar hensyn til dette, slik at man kan foreta positive affine transformasjoner uten at dette påvirker målet på risikoaversjon.

Intuisjonen bak dette målet er at vi har en agent med formue w og et *lite* lotteri ϵ hvor vi kan vinne eller tape et visst beløp. Uten tap av generalitet kan vi anta formue og lotteri er slik at $E[\epsilon] = 0$. Så spør vi agenten om hvilket *beløp* π hun er villig til å betale for å kvitte seg med dette lotteriet. Hun er indifferent mellom å betale risikopremien π og beholde lotteriet når

$$u(w - \pi) = E[u(w + \epsilon)].$$

Ved å foreta en Taylor rekkeutvikling rundt w av første orden på venstre side og av andre orden på høyre side, får vi:

$$u(w)+u'(w)(w-\pi-w) = E\left[u(w) + u'(w)(w - \epsilon - w) + \frac{1}{2}u''(w)(w - \epsilon - w)^2\right]$$

Nå har vi fått risikopremien og lotteriet utenfor nyttefunksjonen. Litt opprydning, det at $E[\epsilon] = 0$ og at dette medfører at $\sigma^2 = Var[\epsilon] = E[\epsilon^2]$, gir

$$\pi \approx -\frac{1}{2}\frac{u''(w)}{u'(w)}\sigma^2 = \frac{1}{2}A(w)\sigma^2 \quad \text{hvor} \quad A(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}. \tag{1.1}$$

Å sammenlikne nytte mellom ulike personer er meningsløst, da nytte kun blir brukt til å rangere valg. Siden det er fornuftig å anta at mer risikoaverse aktører, alt annet like, er villig til å betale mer for å bli kvitt et lotteri med gitt risiko, så kan man sammenlike grad av risikoaversjon ved å se på risikopremien. Ser at alle som foretrekker mer fremfor mindre og som er risikoaverse er villig til å betale et positivt beløp for å kvitte seg med dette lotteriet. Dette beløpet blir også større desto større variansen til lotteriet blir.

$A(w)$ er Arrow-Pratts mål på absolutt risikoaversjon. Dette målet forblir det samme selv om vi foretar positive affine transformasjoner på nyttefunksjonen. Siden risikopremien π sier hvilket *beløp* man er villig til å betale for å bli kvitt lotteriet, er $A(w)$ et mål på absolutt risikoaversjon. Uten å gå veien om Taylorapproksimasjon kan man også vise at dersom $a_2(w) > a_1(w) \; \forall \; w$, vil agent 2 utøve mer risikoavers adferd og vedkommendes nyttefunksjon vil krumme mer enn nyttefunksjonen til agent 1.

Dersom man blir rikere, er det rimelig utenkelig at man vil betale et større beløp for å bli kvitt en gitt risiko. Vi kan derfor fastslå at fornuftige nyttefunksjoner også må tilfredsstille $A'(w) \leq 0$.

Helt analogt til dette kan man anta at man har et lotteri hvor man taper eller vinner en viss *andel* $\hat{\epsilon}$ av formuen, og så se på hvor stor andel $\hat{\pi}$ av formuen man er villig til å betale for å bli kvitt denne risikoen. Man er indifferent mellom å beholde lotteriet og betale andelen $\hat{\pi}$ når

$$u(w - w\hat{\pi}) = E[u(w + w\hat{\epsilon})].$$

Ved å bruke nøyaktig samme fremgangsmåte som i sted, ender man opp med

$$\hat{\pi} \approx -\frac{1}{2}\frac{wu''(w)}{u'(w)}\sigma^2 = \frac{1}{2}R(w)\sigma^2 \quad \text{hvor} \quad R(w) = -\frac{wu''(w)}{u'(w)} = wA(w).$$

Hvis to personer har den samme andelen av sin formue satt på spill på det samme lotteriet, og hvis en av dem er villig til å gi opp en større andel av sin formue for å bli kvitt dette lotteriet, så er den relative risikoaversjoen høyere hos den personen. $R(w)$ er derfor et mål på relativ risikoaversjon.

Hvis formuen øker her, så øker også beløpet $w\hat{\epsilon}$ som er satt på spill, så vi kan ikke legge tilsvarende begrensinger på $R(w)$ som vi la på $A(w)$.

Mehra og Prescott (1985) siterer en rekke kilder som hevder at fornuftige anslag på relativ risikoaversjon bør være en konstant. Dette betyr at dersom man står i fare for å vinne eller tape en viss andel av formuen, skal man være villig til å betale en gitt andel av denne formuen for å bli kvitt denne risikoen uavhengig av hvor rik man faktisk er. En nyttefunksjonen som oppfyller dette er

$$u(w) = \frac{w^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha} \quad \text{hvor} \quad \alpha > 0 \quad \text{og} \quad \alpha \neq 1.$$

Ved å derivere to ganger og sette inn i uttrykket for $R(w)$, finner man at $R(w) = \alpha$. Dersom $\alpha = 1$ er ikke dette uttrykket definert, men ved å bruke L'Hôpitals regel får man:

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{w^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha} = \lim_{\alpha \to 1} \frac{-w^{1-\alpha} \ln w}{-1} = \ln w$$

Ved å derivere $u(w) = \ln w$ to ganger og sette inn uttrykket for $R(w)$, bekrefter man at $R(w) = 1$ i dette tilfellet. Vi har derfor en nyttefunksjoner som svarer til alle verdier for konstant relativ risikoaversjon.

1.2 Grunnleggende aktivaprisning

Vanligvis brukes nyttefunksjoner til å rangere ulike valgmuligheter på ett gitt tidspunkt. Vi skal nå se på en modell som består av én periode og to tidspunkt, det vil si at man kan ha konsum både i begynnelsen og i slutten av en periode. Hvis vi lar en person velge hvorvidt vedkommende vil ha noe som gir en viss nytte nå eller en gang i fremtiden, vil de aller fleste velge å få det med en gang. For å få dette inn i den samlede nyttefunksjonen, neddiskonterer vi nytten fra det siste tidspunktet med faktoren β. Denne faktoren vil derfor være lavere enn 1, og det er også utenkelig at den kan være 0 eller lavere, da dette ville ført til at fremtidig konsum gav henholdsvis ingen eller redusert nytte. Det er også klart at penger og avkastning i seg selv ikke gir noen nytte, det man derimot er opptatt av er hvor mye *konsum* man kan oppnå. Den samlede nytten en person får fra konsum på de to tidspunktene kan derfor skrives som

$$V(c_0, c_1) = u(c_0) + \beta E[u(c_1)]. \tag{1.2}$$

En antagelse som følger av dette er at nytten er tidsseparabel. Det betyr at konsumet på tidspunkt 0 kun gir nytte på tidspunkt 0, og dette påvirker ikke nytten på tidspunkt 1. Denne antagelsen gjør at alt blir veldig mye lettere å regne med, men man kan selvfølgelig diskutere hvorvidt dette er realistisk. Dette kan illustreres ved å tenke på to helt like personer som i begynnelsen av perioden fikk henholdsvis mye og lite konsum, mens de i slutten av perioden fikk like mye. Med den gitte nyttefunksjon skal nytten til disse personene være lik på tidspunkt 1, men dette er ikke opplagt. På samme tidspunkt er grensenytten avtakende, og hvis tidspunktene lå tilstrekkelig nært hverandre kan det tenkes at den personen som fikk lavest konsum på første tidspunkt fikk høyest nytte på andre. Man kan også tenke seg at det motsatte er tilfellet, nemlig at den som fikk høyt konsum i begynnelsen av perioden hadde vendt seg til dette høye konsumet, og dermed fikk lavere nytte av konsumet i slutten av perioden.

Betrakt nå en økonomi som varer én periode og kun består av én person. Her har vi altså ingen å handle med og ingen produksjonsmidler. Denne personen har konsum e_0 på tidspunkt 0 og e_1 på tidspunkt 1, hvor konsumet i slutten av perioden ikke er kjent i begynnelsen. Siden det heller ikke er mulig å investere noe, vil hun få dette konsumet uansett hva vedkommende gjør. Denne økonomien kan derfor sees på som en fruktøkonomi inspirert av

Lucas (1978), det vil si at man har noen trær på en øde øy, og på hvert tidspunkt gir disse trærne deg en viss mengde frukt som du enten kan spise eller la være å spise. Hvis man ikke spiser frukten på det tidspunktet man plukket den vil den bli ødelagt, og vi antar også at heller ikke er mulig å plante frukten slik at man får flere trær senere.

Så gir vi denne personen tilgang til et fiktivt aksjemarked. Vedkommende vil *tro* at hun fritt har mulighet til å kjøpe og selge blant n ulike aktiva, og tanken nå er å få innsikt i prisdannelse ved å se på hva prisene må være for at vi ikke skal bli avslørt. Hvor mye som kommer til å bli kjøpt av hvert aktivum er altså allerede kjent, men prisene til aktivaene vil bli gitt av modellen.

For at en allokering skal være en likevekt, må ingen aktører kunne gjøre det bedre, og tilbud og etterspørsel må være lik i alle markeder. Her har vi kun én aktør, nemlig den ene personen, så for at vi skal ha en likevekt må vedkommende maksimere sin nytte. Dersom vi hadde hatt flere aktører måtte de ha gjort det samme, og dersom vi hadde hatt bedrifter, måtte de ha maksimert sin profitt. Det har vi ikke her, så vi kan gå videre med å maksimere denne ene personens nytte.

Fra nå av ser vi situasjonen gjennom denne personens øyne: Hvert aktivum j handles til pris p_j i begynnelsen av perioden og gir en utbetaling x_j i slutten av perioden. Denne utbetalingen er vanligvis, men ikke nødvendigvis, ukjent på tidspunkt 0. Vedkommende inntar posisjon θ_j i hvert aktivum j på en slik måte at samlet forventet nytte blir maksimert:

$$\max_{\{\theta_i\}} u(c_0) + \beta E[u(c_1)] \quad u.b. \quad \begin{cases} c_0 = e_0 - \sum_{i=1}^{n} \theta_i p_i \\ c_1 = e_1 + \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i \end{cases}$$

Bibetingelsene sier at dersom personen kjøper en mengde θ_j av aktivum j til pris p_j, vil konsumet bli redusert med $\theta_j p_j$ på tidspunkt 0 og øke med $\theta_j x_j$ på tidspunkt 1. Det er heller ingenting som hindrer vedkommende i å selge et aktivum. Dersom hun selger en mengde θ_i av aktivum i vil θ_i være negativt og føre til at konsumet på tidspunkt 0 øker med $\theta_i p_i$ og siden hun da er forpliktet til å betale ut $\theta_i x_i$ på tidspunkt 1, vil konsumet i slutten av perioden bli redusert med tilsvarende. Ved å sette inn uttrykkene for c_0 og c_1 i nyttefunksjonen, derivere med hensyn på θ_i og sette lik null, får man førsteordensbetingelsene:

$$-p_i u'(c_0) + \beta E[u'(c_1)x_i] = 0$$

Dette sier at dersom θ_i er slik at den marginale nytten av å få redusert sitt konsum med p_i idag akkurat er lik den forventede marginale nytten av å få x_i i slutten av perioden, så er det ikke mulig for henne å gjøre det bedre. Ved å løse ut for pris får man:

$$p_i = E\left[\beta \frac{u'(c_1)}{u'(c_0)} x_i\right] \tag{1.3}$$

Dette kan sees på som en likevektspris. Dersom dette aktivumet hadde hatt en lavere pris enn dette, ville vår person ha ønsket å kjøpe det, tilbudet ville ikke vært lik etterspørselen og hun hadde avslørt at aksjemarkedet ikke var reelt. Det samme hadde skjedd dersom prisen var høyere enn dette. Da ville vedkommende ha ønsket å selge dette aktivumet, og siden det ikke finnes noen kjøpere, kan ikke dette være en likevekt. I likevekt holder hun altså ingen aksjer, og prisene er slik at hun hverken ønsker å kjøpe eller selge noe aktivum.

Dersom vi istedenfor gitt konsum og ingen aksjer, hadde antatt at det fantes en naturlig gitt mengde av hvert aktivum, hadde vi fått samme resultat, men da hadde hun i likevekt holdt den gitte mengden av hvert aktivum.

Tolkningen av dette uttrykket kan gjøres lettere ved å anta et det er et endelig antall $\mathcal{S}$ tilstander:

$$p_i = \sum_{s=1}^{\mathcal{S}} P(S = s)\beta \frac{u'(c_1(s))}{u'(c_0)} x_i(s)$$

Ser fra denne formelen at et aktivum som har høy pris, kan ha dette fordi det betaler ut mye i de tilstandene hvor marginalnytten er høy. Siden marginalnytten er en funksjon som er avtakende i konsum, betyr dette at konsumet er lavt i disse tilstandene, og et slikt aktivum vil derfor kunne regnes som en forsikring mot de dårligste utfallene, noe en risikoavers aktør ser på som attraktivt og vil derfor være villig til å betale mye for.

Faktoren $\beta\frac{u'(c_1)}{u'(c_0)}$ i uttrykk 1.3 ikke er avhengig av aktivumet, og den vil således være den samme uavhengig av hvilket aktivum man ønsker å prise. Man kan derfor definere den stokastiske diskoneringsfaktoren som

$$m = \beta\frac{u'(c_1)}{u'(c_0)} \tag{1.4}$$

og skrive uttrykk 1.3 som

$$p_i = E[mx_i]. \tag{1.5}$$

Avkastningsfaktoren er gitt ved $R_i = \frac{x_i}{p_i}$ og innsatt i 1.5 gir dette

$$1 = E[mR_i]. \tag{1.6}$$

Dette uttrykket har vi utledet uten å legge noen som helst begrensninger på x_i og følgelig R_i, så dette vil gjelde uavhengig av sannsynlighetsfordelingen til avkastningen. Vi har heller ikke sagt noe mer om nyttefunksjonene enn at den er tidsseparabel, så dette uttrykket vil også gjelde for hele familien av Bernoulli nyttefunksjoner.

1.3 Generalisering til flere perioder

Énperiodemodellen har klare svakheter. På tidspunkt 0 foretar vi en del valg, og disse valgene har betydningen for oss idag og på tidspunkt 1. Etter det siste tidspunktet opphører verden å eksistere. I virkeligheten er det mulig oppdatere sine konsum- og porteføljevalg etterhvert som man får nye informasjon og man kan planlegge flere perioder frem. Denne dynamikken får man ikke frem i den enkle modellen.

Istedenfor én periode og to tidspunkt, antar vi nå at vår agent lever i $T - t$ perioder og at vedkommende kan gjøre valg knyttet til konsum og investering på alle de $T - t + 1$ tidspunktene. Vi fortsetter med antagelsen om at det kun finnes én agent. Istedenfor å anta at agenten har en viss mengde konsum i utgangspunktet og at det ikke finnes noen aktiva, skal vi nå anta at det finnes en viss mengde aktiva og at agenten ikke er gitt noe konsum utenom dette. Dette utgjør ingen forskjell for vår analyse, den eneste forskjellen er måten vi lurerer den ene personen på. Siden agenten fortsatt ikke har noen å handle med eller noen produksjonsmidler, kan vi fremdeles se på dette som en fruktøkonomi: Vår person sitter på en øde øy, hver periode kan vedkommende konsumere det som faller ned fra trærne, hun har ikke mulighet til å spare frukt til senere eller plante frukten og få flere trær på senere tidspunkt. Istedenfor å gi henne alle trærne og introdusere aktiva som ikke finnes, skal vi nå introdusere henne for aktiva som gir eierskap til de ulike trærne. Tanken bak dette er å få innsikt i hva prisene på de ulike aktivaene må være for at hun ikke skal avsløre at konsumet hennes faktisk er begrenset av hva som kommer fra disse trærne. Dette blir med andre ord akkurat samme situasjon som i forrige avsnitt, da vi i begge tilfeller vet på forhånd hvor mye av hvert aktivum hun kommer til å holde og at hun på hvert tidspunkt kommer til å konsumere alt som er tilgjengelig på øyen. Prisene vil fortsatt tilpasses et konsum og en aktivaallokering som er gitt utenfra, og det er her vi får innsikten fra. Fordelen med å gjøre det på denne måten er at analysen vi nå skal gjøre hadde blitt helt tilsvarende hvis vår agent var én av mange pristakere.

Nå skal vi igjen se situasjonen fra agenten sitt perspektiv. Hun vet ikke at markedet kun består av trær på øyen, og når hun skal finne ut hvor mye hun skal konsumere og hvor mye hun skal investere, vil hun tenke på samme måte som om hun var pristaker i et stort marked.

Konsumet hennes på tidspunkt t er angitt av c_t, mens den andelen av formuen som investert i aktivum n på tidspunkt t er gitt ved ϕ_t^n. Ved tidspunkt $T-t+1$ vet agenten at dette er slutten på alt, og siden hun foretrekker mer konsum fremfor mindre konsum, er det åpenbart optimalt å konsumere hele formuen. Porteføljeallokering er derfor ikke relevant i slutten av den siste perioden. Hvis vi har to like personer med samme initielle formue, vil den maksimale nytten de to kan oppnå være lik. Derimot hvis en av dem hadde høyere initiell formue, ville vedkommende ha klart å gjøre allokeringer som gav høyere forventet nytte enn den andre personen. Maksimal forventet nytte vil derfor være en funksjon av formue. Vi antar nå at vi befinner oss på tidspunkt t, og vi kan da definere den maksimale nytten det er mulig å oppnå som

$$J(t, W_t) = \max_{\{c_s\}_{s=t}^{T}, \{\phi_s^n\}_{s=t}^{T-1} \forall n} E_t \sum_{s=t}^{T} u(s, c_s)$$

hvor $E_t[\,\cdot\,] = E[\,\cdot\,|\mathcal{F}_t]$, det vil si forventningen betinget på den informasjonen agenten har på tidspunkt t. Her er nyttefunksjonen generalisert slik at den kan avhenge av tiden på en annen måte enn i forrige avsnitt, og sammenhengen her vil være $u(t, c_t) = \beta^t u(c_t)$. Fordi sannsynlighetsfordelingen ikke påvirkes av beslutningsvariablene, kan vi skrive dette som

$$J(t, W_t) = \max_{c_t, \phi_t^n \forall n} \left\{ u(t, c_t) + E_t \left[\max_{\{c_s\}_{s=t+1}^{T}, \{\phi_s^n\}_{s=t+1}^{T-1} \forall n} \sum_{s=t+1}^{T} u(s, c_s) \right] \right\}.$$

Dette betyr at når vi på tidspunkt t skal finne vårt optimale konsum og vår optimale portefølje, så tar vi med i beregningene at vi også på neste tidspunkt vil opptre optimalt. Ved å substituere det som står inni hakeparentesene med neste periodes beslutningsproblem, får man ut Bellman-likningen:

$$J(t, W_t) = \max_{c_t, \phi_t^n \forall n} \Big\{ u(t, c_t) + E_t J(t+1, W_{t+1}) \Big\} \tag{1.7}$$

Når vi virkeligheten skal avgjøre om vi skal kjøpe noe eller ikke, tenker vi ikke på hvordan dette vil endre på vårt konsum i de resterende periodene av vårt liv. Derimot tenker vi over om gleden dette gir er verdt nedgangen i formue, og det er 1.7 en god modell på.

Nå over til budsjettbetingelsen. Etter vår investor har konsumert det hun ønsker i periode t, har hun $W_t - c_t$ igjen. Dette kan hun investere i de $N+1$ ulike aktivaene som er tilgjengelig, og hun vil ønske å investere hele den gjenværende formuen. Å kaste vekk midler er åpenbart ikke optimalt, da hun kunne ha økt sin nytte ved å konsumere dette, enten idag eller på et fremtidig tidspunkt etter for eksempel å ha investert midlene i det risikofrie aktivumet.

På tidspunkt t investerte hun andelen ϕ_t^n av formuen sin i aktivum n, målt i penger blir dette $(W_t - c_t)\phi_t^n$. I løpet av perioden vokser dette beløpet med avkastningsfaktoren R_{t+1}^n, så resultatet av investeringen i aktivum n målt i penger på neste tidspunkt blir dermed $(W_t - c_t)\phi_t^n R_{t+1}^n$. For å finne formuen på neste tidspunkt, summerer vi resultatet fra alle investeringene, og vi får dermed:

$$W_{t+1} = (W_t - c_t) \sum_{n=0}^{N} \phi_t^n R_{t+1}^n \tag{1.8}$$

Siden det kun finnes én agent, og fordi hun får alt sitt konsum gjennom eierskap av aksjer, vet vi som sagt at hun kommer til å eie alle aktivaene og ikke noe annet. Dette betyr at hun vil investere hele sin formue, og siden ϕ_t^n er *andelen* av formuen hun har investert i aktivum n, vet vi at summen av disse vektene må summere seg til 1. Dette betyr at $\sum_{n=0}^{N} \phi_t^n = 1$, og ved å kombinere dette med 1.8 får man bibetingelsen

$$W_{t+1} = (W_t - c_t)\left[R^0_{t+1} + \sum_{n=1}^{N} \phi^n_t (R^n_{t+1} - R^0_{t+1})\right]. \tag{1.9}$$

Hvis vi hadde hatt mange agenter, ville hver enkelt av disse agentene i hver periode ha investert hele sin gjenværende formue i de ulike aktivaene, så vi ville endt opp med samme bibetingelse her som i dette tilfellet.

For å forenkle notasjonen defineres avkastningen på den samlede porteføljen som

$$R^\phi_{t+1} = R^0_{t+1} + \sum_{n=1}^{N} \phi^n_t (R^n_{t+1} - R^0_{t+1}).$$

Ved å derivere målfunksjonen med hensyn på ϕ^n_t og sette like null, får vi førsteordensbetingelsene for hva optimal andel i aktivum n på tidspunkt t må tilfredsstille:

$$E_t[J_W(t+1, W_{t+1})(R^n_{t+1} - R^0_{t+1})] = 0 \tag{1.10}$$

Hva optimalt konsum må tilfredsstille finnes på samme måte:

$$u_c(t, c^*_t) = E_t[J_W(t+1, W_{t+1})R^\phi_{t+1}]$$

$$= E_t[J_W(t+1, W_{t+1})R^0_{t+1}] + \sum_{n=1}^{N} \phi^n_t \underbrace{E_t[J_W(t+1, W_{t+1})(R^n_{t+1} - R^0_{t+1})]}_{=0 \text{ pga } 1.10}$$

Så førsteordensbetingelsen for c_t blir:

$$u_c(t, c^*_t) = E_t[J_W(t+1, W_{t+1})R^0_{t+1}] \tag{1.11}$$

Funksjonen $J_W(t+1, W_{t+1})$ inngår i de førsteordensbetingelsene vi har funnet til nå. Denne sier hvordan maksimal oppnåelig nytte i neste periode endrer seg dersom vi i neste periode blir litt rikere, så vi kunne ha tolket disse uttrykkene på tilsvarende måte som vi gjorde i forrige avsnitt. Dette er imidlertid en nyttefunksjon hvor formue inngår, og så lenge man ikke er

Onkel Skrue, får man ikke nytte av formuen i seg selv, men derimot konsummulighetene denne formuen gir. Denne funksjonen er derfor mindre intuitiv og tyngre å jobbe med enn en vanlig nyttefunksjon, og for å få denne vekk skal vi bruke omhyllingsteoremet. Dette teoremet forteller oss hvordan maksimal oppnåelig nytte endrer seg når vi blir litt rikere. Agenten sitt nyttemaksimeringsproblem blir løst av c_t^* og $\{\phi_t^{n*}\}_{n=0}^N$, og ved å sette disse inn i den opprinnelige funksjonen finner vi at den maksimale nytten agenten kan oppnå på tidspunkt t er:

$$J(t, W_t) = u(t, c_t^*) + E_t[J(t+1, \underbrace{(W_t - c_t^*)R_{t+1}^{\phi*}}_{W_{t+1}})]$$

W_t er ikke en tilfeldig variabel på tidspunkt t, så vi kan derivere med hensyn på denne:

$$J_W(t, W_t) = u_c(t, c_t^*)\frac{\partial c_t^*}{\partial W_t}$$
$$+E_t\left[J_W(t+1, W_{t+1})\left\{(1 - \frac{\partial c_t^*}{\partial W_t})R_{t+1}^{\phi*} + (W_t - c_t^*)\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial \phi_t^{n*}}{\partial W_t}(R_{t+1}^n - R_{t+1}^0)\right\}\right]$$

Nå har vi antatt at $\frac{\partial c_t^*}{\partial W_t}$ og $\frac{\partial \phi_t^{n*}}{\partial W_t}$ faktisk finnes. Dette er ingen stor begrensning, det eneste vi har antatt er at alle funksjoner har 'fin' oppførsel. Litt omgruppering gir

$$J_W(t, W_t) = (W_t - c_t^*)\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial c_t^*}{\partial W_t}\underbrace{E[J_W(t+1, W_{t+1})(R_{t+1}^n - R_{t+1}^0)]}_{=0 \text{ pga } 1.10}$$
$$+\frac{\partial c_t}{\partial W_t}\underbrace{\{u_c(t, c_t^*) - E_t[J_W(t+1, W_{t+1})]\}}_{=0 \text{ pga } 1.11} + E_t[J_W(t+1, W_{t+1})R_{t+1}^{\phi*}],$$

så vi sitter igjen med:

$$J_W(t, W_t) = E_t[J_W(t+1, W_{t+1})R_{t+1}^{\phi*}] \tag{1.12}$$

Ved å ta utgangspunkt i 1.10 og substituere inn for 1.11 og 1.12 får man:

$$u_c(t, c_t^*) = E_t[u_c(t+1, c_{t+1}^*)R_{t+1}^n] \tag{1.13}$$

Ved å sette inn for nyttefunksjonen vi brukte i den enkle énperiodiske modellen, nemlig $u(t, c_t) = \beta^t u(c_t)$, ser man at resultatene fra de to modellene er helt analoge, og dette er således et interessant resultat. Hvis vi tar to vilkårlige etterfølgende tidspunkt i den fler-periodiske modellen vil priser og avkastning oppfylle nøyaktig de samme betingelsene som i den enkle modellen. Den stokastiske diskonteringsfaktoren og den generelle prisningsformelen blir også helt tilsvarende:

$$1 = E_t[m_{t+1} R^n_{t+1}] \quad \text{hvor} \quad m_{t+1} = \frac{u_c(t+1, c^*_{t+1})}{u_c(t, c^*_t)}$$

Dette resultatet kan generaliseres ytterligere ved å gå en periode frem i 1.13 og substituere dette inn igjen i det samme uttrykket:

$$u_c(t, c^*_t) = E_t[E_{t+1}[u_c(t+2, c^*_{t+2}) R^n_{t+1,t+2}] R^n_{t,t+1}]$$

Siden vi nå befinner oss i periode t, og avkastningen $R^n_{t+1,t+2} R^n_{t,t+1} = R^n_{t,t+2}$, får vi

$$u_c(t, c^*_t) = E_t[u_c(t+2, c^*_{t+2}) R^n_{t,t+2}],$$

og ved å gjenta dette k ganger ender vi opp med:

$$u_c(t, c_t) = E_t[u_c(t+k, c^*_{t+k}) R^n_{t,t+k}]$$

Dette resultatet viser at uttrykk 1.13 ikke bare gjelder for perioder av lengde 1, men også for perioder av vilkårlig lengde. Generell prisningsformel og stokastisk diskonteringsfaktor blir også helt tilsvarende i det flerperiodiske tilfellet:

$$1 = E_t[m_{t,t+k} R^n_{t,t+k}] \quad \text{hvor} \quad m_{t,t+k} = \frac{u_c(t+k, c^*_{t+k})}{u_c(t, c^*_t)}$$

Disse uttrykkene vil ha samme tolkning som i den énperiodiske modellen. Av dette følger det direkte at prisen ved tid t til et aktivum som betaler x_{t+k} på tidspunkt $t+k$ blir $p_t = E_t[m_{t,t+k}x_{t+k}]$ og følgelig blir prisen til et aktivum som har utbetalinger i mange perioder dette:

$$p_t = E_t \sum_{s=t+1}^{T} m_{t,t+s}x_{t+s} \tag{1.14}$$

I dette avsnittet har vi sett at innsikten vi fikk fra den enkle énperiodiske modellen også gir mening dersom man generaliserer dette til flere perioder. Dette er viktig, da vi skal bruke denne modellen i sammenheng med data fra den virkelige verden. Vi kan derfor gå videre med resultatene fra avsnitt 1.2.

1.4 Risikopremie og risikofri rente

La oss nå anta at det kun er mulig å investere i to aktiva, et risikofritt med sikker avkastningsfaktor R_f og et risikabelt med usikker avkastningsfaktor R. Uttrykk 1.6 vil fortsatt gjelde, og siden R_f er ikke-stokastisk, får vi:

$$\frac{1}{R_f} = E[m] \tag{1.15}$$

Nå over til det risikable aktivumet. Med utgangspunkt i uttrykk 1.6 kan man skrive:

$$1 = E[m_t R] = E[m]E[R] + cov(m, R)$$

og ved å bruke uttrykk 1.15 kan man få et uttrykk for risikopremien

$$E[R] - R_f = -\frac{cov(m, R)}{E[m]}.$$

Ser herfra at dersom et aktivum som har avkastning som samvarierer negativt med den stokastiske diskonteringsfaktoren, vil dette føre til høy risikopremie. Et aktivum som har denne egenskapen får høy avkastning når grensenytten er lav og konsumet høyt, og lav avkastning når grensenytten er høy og konsumet lavt. Et slikt aktivum fremstår som meget lite attraktivt å holde for en risikoavers aktør som ønsker mest mulig jevnt konsum, og for at noen skal ville holde dette, må risikopremien være høy. Videre vil aktiva som gir utbetalinger i de tilstander hvor konsumet ellers er lavt bli handlet selv om risikopremien er lav, fordi disse er attraktive å holde. Dette er fornuftig, og helt analogt til forklaringen på hvorfor aktiva kan ha ulik pris. Ved ytterligere omskrivninger kan man få et uttrykk for Sharperatio:

$$E[R] - R_f = -\frac{cov(m, R)}{\sigma_m \sigma_R} \frac{\sigma_m \sigma_R}{E[m]}$$

eller

$$SR = \frac{E[R] - R_f}{\sigma_R} = -\rho_{m,R} \frac{\sigma_m}{E[m]}$$

Hvordan den stokastiske diskonteringsfaktoren samvarierer med avkastningen på det risikable aktivumet er vanskelig å tallfeste, men siden $\rho_{m,R}$ er en korrelasjonskoeffisient vet vi at $\rho_{m,R} \in [-1, 1]$, så følgende holder, jamfør Hansen og Jagannathan (1991):

$$|SR| \leq \frac{\sigma_m}{E[m]} \tag{1.16}$$

Den maksimale Sharperatioen det er mulig er oppnå, fåes dermed ved å velge en portefølje som er perfekt negativt korrelert med den stokastiske diskonteringsfaktoren. Denne porteføljen gjør det godt i gode tilstandene og dårlig i de dårlige tilstandene, og er derfor svært risikabel.

For å kunne si noe mer om risikopremie og risikofri rente nå, må vi ta flere forutsetninger. Antar at representativ agent har nyttefunksjonen

$$u(c) = \beta \frac{c^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha} \quad \text{hvor} \quad \alpha > 0 \quad \text{og} \quad \alpha \neq 0. \tag{1.17}$$

I avsnitt 1.1 argumenterte vi for at denne hadde mange gunstige egenskaper, så valget av denne er fornuftig. Den stokastiske diskonteringsfaktoren kan nå uttrykkes som

$$m = \beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\alpha}.$$

Antar også at veksten i konsum er log-normalfordelt med forventing μ_c og varians σ_c^2, dvs

$$\ln\frac{c_{t+1}}{c_t} \sim N(\mu_c, \sigma_c^2) \tag{1.18}$$

og ved å bruke dette, antagelsen om power-nytte samt uttrykket for den momentgenererende funksjonen til normalfordelingen får man:

$$E[m] = E\left[\beta\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\alpha}\right] = \beta E\left[e^{-\alpha\ln\frac{c_{t+1}}{c_t}}\right]$$

$$E[m] = \beta e^{-\alpha\mu_c+\frac{1}{2}\alpha^2\sigma_c^2} \tag{1.19}$$

$$E[m^2] = E\left[\left(\beta\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\alpha}\right)^2\right] = \beta^2 E\left[e^{-2\alpha\ln\frac{c_{t+1}}{c_t}}\right]$$

$$E[m^2] = \beta^2 e^{-2\alpha\mu_c+2\alpha^2\sigma_c^2}$$

$$Var(m) = E[m^2] - (E[m])^2$$

$$Var(m) = \beta^2 e^{-2\alpha\mu_c+\alpha^2\sigma_c^2}\left(e^{\alpha^2\sigma_c^2}-1\right) \tag{1.20}$$

Disse eksplisitte uttrykkene for varians og forventning kan man sette inn i uttrykk 1.16:

$$SR = \frac{\sigma_m}{E[m]} = \frac{\sqrt{\beta^2 e^{-2\alpha\mu_c+\alpha^2\sigma_c^2}(e^{\alpha^2\sigma_c^2}-1)}}{\beta e^{-\alpha\mu_c+\frac{1}{2}\alpha^2\sigma^2}}$$

$$SR = \sqrt{e^{\alpha^2\sigma_c^2}-1}$$

Siden Sharperatio er at tall som er betydelig lavere enn 1, blir SR^2 et lite tall og følgende sammenheng gjelder:

$$\ln(1+SR^2) = \alpha^2\sigma_c^2 \approx SR^2$$

$$SR \approx \alpha\sigma_c$$

Dermed kan vi finne et uttrykk for risikopremien:

$$ER - R_f \approx \alpha\sigma_c\sigma_R \tag{1.21}$$

Dette betyr at jo høyere α er, det vil si jo mer risikoavers vår representative agent er, desto høyre vil risikopremien være. Dette skjer fordi det å investere i det risikable aktivumet vil medføre usikkerhet, og jo mer man misliker usikkerhet, desto større risikopremie vil man kreve for å være villig til å investere i et slikt risikabelt aktivum. Risikopremien øker også med standardavviket til konsumet og det risikable aktivumet. Dette er også fornuftig, da dersom disse er høye, vil det bety mye usikkerhet, noe vår agent misliker, og man vil kreve høy risikopremie for å være villig til å investere i noe slikt.

Sammenhengen mellom risikofri rente, r_f, og risikofri rentefaktor, R_f, er $R_f = 1 + r_f$. Dermed følger et eksplisitt uttrykk for den risikofrie renten direkte fra uttrykk 1.15 og 1.19:

$$r_f \approx \ln(R_f) = -\ln\beta + \alpha\mu_c - \frac{1}{2}\alpha^2\sigma_c^2 \tag{1.22}$$

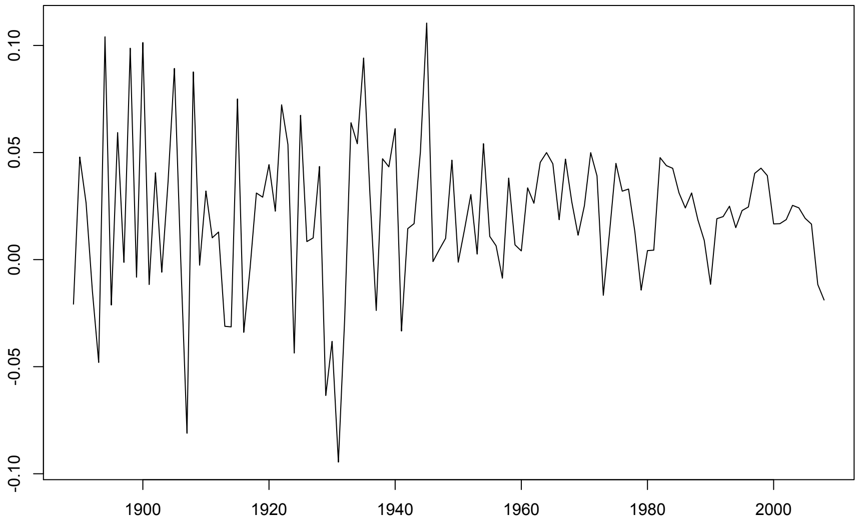
Ser herfra at den risikofrie renten er høy hvis β er lav, det vil si at fremtidig nytte blir neddiskontert kraftig og agenten er veldig utålmodig. Dette er fornuftig da en slik utålmodig person vil kreve høy rente for å være villig til å spare. Høy forventet vekst i økonomien vil også, alt annet like, føre til at risikofri rente blir høyere. Når konsumet forventes å øke mye, vil vår person kreve stor kompenasjon for å flytte konsum fra en periode hvor konsumet er lavt til en periode hvor konsumet er høyere, og den risikofrie renten må følgelig være høy for at vedkommende skal gå med på dette. Høyere usikkerhet rundt fremtidig konsum gjør at en risikoavers agent vil være føre var og spare mer. Dette vil presse likevektsrenten ned, og denne effekten vil være sterkere desto mer risikoavers man er. Agentens relative risikoaversjon kommer inn to ganger med forskjellig fortegn, og effekten av økt α vil derfor være tvetydig. Dette skjer fordi man kan ikke øke α uten å senke agentens villighet til å flytte konsum mellom ulike perioder. Viktigheten av dette vil jeg imidlertid komme tilbake til senere.

Kapittel 2

Risikofri rente- og risikopremiemysteriet

I forrige avsnitt fant vi likevektsuttrykk for risikofri rente og risikopremie. Her inngikk relativ risikoaversjon, tidspreferanse samt forventing og standardavvik til henholdsvis vekst i konsum og avkastning til markedet. Alt bortsett fra relativ risikoaversjon og tidspreferanse er tall som man skulle tro var lett å måle, og idéen til Mehra og Prescott (1985) var å bruke de to likningene til å finne de to ukjente.

Figur 2.1 viser hvordan reelt konsum per innbygger har utviklet seg i USA. Dette er tall fra Shiller (2009) og er de samme tallene som Mehra og Prescott brukte, bare disse er oppdatert. Fra 1929 og frem til idag er grunnlaget for disse tallene National Income and Products Accounts of United States (NIPA) produsert av Bureau of Economic Analysis (BEA). I dataserien NIPA blir den samlede, årlige verdien av ulike vare- og tjenestetyper i USA forsøkt estimert ved hjelp av data fra statsforvaltningen og spørreundersøkelser. Fra disse tallene er ikke-varige konsumgoder og tjenester skilt ut og justert for inflasjon og folketall, og deretter brukt som vårt anslag på reelt konsum per

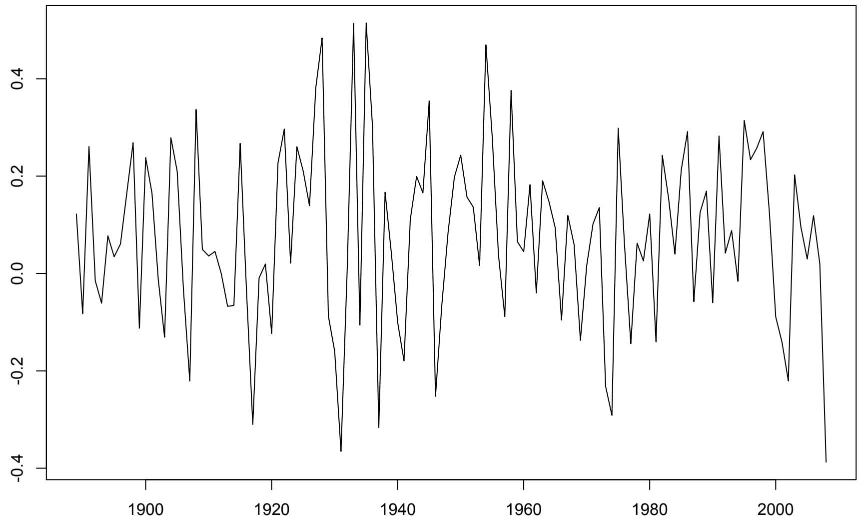


Figur 2.1: Vekst i reelt konsum per innbygger, 1889-2009

innbygger. De første delene av datasettet er satt sammen av henholdsvis Shaw (1919) og Kuznets (1938), og senere justert av Kendrick (1961) for at de skal bli mest mulig sammenlignbar med tallene fra BEA.

Ser fra figur 2.1 at kraftige fall i reelt konsum er meget sjeldne, det er bare et par ganger reelt konsum har falt mer enn 5%, og dette er veldig lenge siden. Det ser også ut som om det har vært et regimeskifte etter andre verdenskrig. Variasjonen ser nemlig ut til å være vesentlig større før 1945 enn etter, og negativ vekst hører også til sjeldenhetene etter andre verdenskrig. Dette ser enda tydeligere ut idag, enn det gjorde for Mehra og Prescott for 30 år siden. Ved en første titt på denne grafen, kan vi derfor konkludere med at veksten i reelt konsum er høy og har lav varians.

Som risikabelt aktivum brukte Mehra og Prescott avkastningstall fra aksjeindeksen S&P500 justert for inflasjon slik at man får ut reelle tall. Dette er en indeks som består av 500 store selskaper notert i USA, og burde således være en god indikasjon på avkastningen i aksjemarkedet. Utviklingen til denne indeksen er vist i figur 2.2. Ser herfra at i forhold til utviklingen i reelt



Figur 2.2: Årlig reell avkastning på S&P500-indeksen, 1889-2009

konsum, er aksjemarkedet vesentlig mer volatilt. Verdiendringer på mer enn 10% er meget vanlig, og det er store svingninger i tallmaterialet. Det er også verdt å merke seg at viktige hendelser som depresjonen, oljekrisen og finanskrisen fører med seg et stort fall i aksjemarkedet, men kun en moderat nedgang i reelt konsum.

Den nominelle avkastningen til S&P500 kan måles helt nøyaktig, hvordan inflasjonen måles vil riktignok være avhengig av litt skjønn, men vi kan likevel være sikre på at vi har greid å måle volatiliteten og avkastningen til det reelle aksjemarkedet med rimelig grad av nøyaktighet. Dataene for reelt konsum er imidlertid av en helt annen karakter. For det første bygger dataene på et anslag på den samlede verdien av alle ikke-varige konsumgoder og tjenester i USA. Dette er som sagt en størrelse det ikke er rett frem å fastsette størrelsen på, og det er veldig mye forskjellig som inngår her. For det andre er mye av konsumet av en slik art at det er vanskelig å avgjøre hvilken periode det faktisk ble konsumert i. Det kan derfor tenkes at noe av variasjonen i reelt konsum har forsvunnet.

	Forventing	Stdavvik
Vekst i konsum	1,83%	3,57%
Avkastning S&P500	6,18%	16,67%
Statskasseveksler	0,80%	5,67%
Risikopremie	6,98%	16,54%

Tabell 2.1: Reelle nøkkeltall for perioden 1889-1978

Da vi utledet likevektsuttrykkene for risikofri rente og risikopremie, antok vi at det eksisterte et aktivum som gav en risikofri *reell* avkastning. Slike aktiva er sjeldne i virkeligheten, det vanlige er at du blir lovet en viss risikofri *nominell* avkastning, og så er det inflasjonen som bestemmer hvor høy reell avkastning du ender opp med. Som anslag på risikofri rente brukte Mehra og Prescott tall fra tre-måneders amerikanske statskasseveksler. Dette er papirer utstedt av den amerikanske staten, og sannsynligheten for at de skal gå konkurs er nærmest ikke-eksisterende. Når vi ser på den reelle avkastningen blir det litt inflasjonsrisiko, men denne er forholdsvis liten i forhold til risikoen i aksjemarkedet. Risikopremien for hvert enkelt år er forskjellen mellom avkastningen til aksjemarkedet og statskasseveksler, og disse tallene ble igjen brukt til å finne et estimat på forventet risikopremie og dens standardavvik. Disse tallene er gjengitt i tabell 2.1.

I avsnitt 1.4 utledet vi følgende uttrykk for henholdsvis risikopremie og risikofri rente:

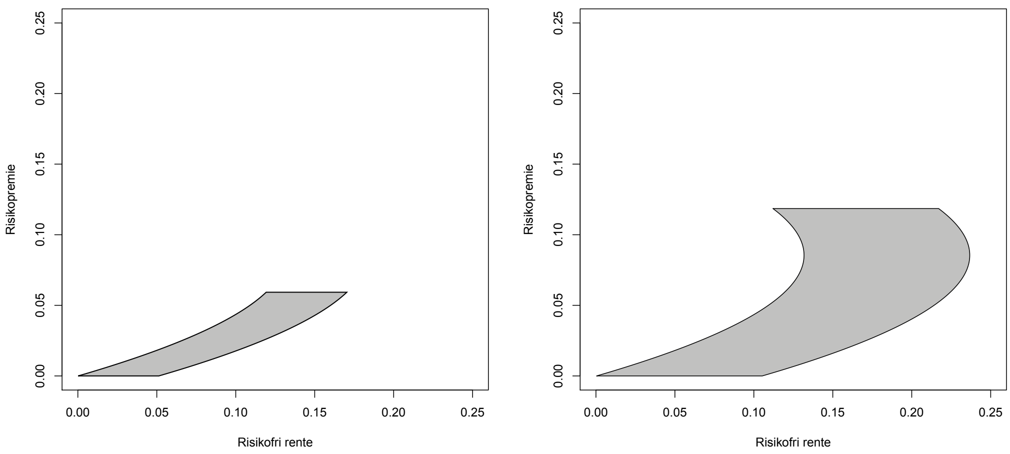
$$Er - r_f \approx \alpha\sigma_c\sigma_r \tag{2.1}$$

$$r_f \approx -\ln\beta + \alpha\mu_c - \frac{1}{2}\alpha^2\sigma_c^2 \tag{2.2}$$

Dersom man setter tallene fra tabell 2.1 inn disse uttrykkene og løser ut for markedets relative risikoaversjon, α, og tidspreferanse, β, finner man at disse tallene blir meningsløse. For det første blir β større enn 1, noe som vi argumenterte for var meningsløst i avsnitt 1.2. Relativ risikoaversjon blir over 10, og Mehra og Prescott mener at dette er altfor høyt. De presenterer flere studier som hevder at α bør ligge rundt 2, og de argumenterer videre for at den ikke kan være høyere enn 10. Det at den ikke kan være høyere enn 10 er nok mest ment som et retorisk virkemiddel, det er ingen grunn til at den i det hele tatt skal være i nærheten av dette. Dersom de tok hensyn til begrensningene på α og β, var 0,35% den høyeste mulige risikopremien de kunne forklare. Dette er meget langt unna den observerte på hele 6,18%.

Ved å godta at kanskje markedet er mer risikoaverst enn hva man trodde, oppstår et annet problem. Standardavviket til konsum per innbygger er meget lite, så det siste leddet i uttrykk 2.2 blir også meget lite. Årlig vekst i konsum er derimot høy, så velger man en høy α for å løse problemet med den høye risikopremien, vil man også få ut en meget høy risikofri rente. Dette viser at ikke alle kombinasjoner av forventet risikopremie og risikofrie rente er mulig å få til dersom man legger begrensninger på α og β. Hvilke kombinasjoner av forventet risikopremie og risikofri rente som faktisk er mulig, dersom forutsetningene i avsnitt 1.4 holder, er vist i figur 2.3. Her er μ_c, σ_c og σ_r som i tabell 2.1, mens resten kan variere.

Tidspreferansen β inngår bare i uttrykket for den risikofrie renten, så jo lavere denne er, dvs jo mer utålmodig man er, jo høyere vil mulig likevektsrente være. Denne effekten kommer frem da laveste tillatte β ble senket fra 0,95 i figur 2.3a til 0,9 i figur 2.3b, og man kan se at mulighetsområdet ble utvidet til høyre. Når α blir høyere, blir vår representative agent mer risikoavers, og vil kreve større kompensasjon for å investere i det risikable aktivumet. Det er denne effekten som gjør at mulighetsområdet blir flyttet oppover når tillatt α blir økt fra 10 til 20. Ser også fra de to figurene at å



(a) $\alpha \in (0; 10)$ og $\beta \in (0,95; 1)$ (b) $\alpha \in (0; 20)$ og $\beta \in (0,90; 1)$

Figur 2.3: Mulighetsområdet for r_f og $Er - r_f$

lempe på begrensingene på de to parametrene ikke førte oss nærmere hva vi har observert, nemlig lav rente og høy risikopremie, og dette illustrer hvor dypt dette problemet stikker.

Denne analysen er selvfølgelig avhengig av at det er riktig å bruke tallene på den måten vi har gjort. Hvis en investor i 1889 hadde investert en hundrelapp på børsen i henholdsvis New York, London, Frankfurt og St. Petersburg, så vet vi fra verdenshistorien at det ville gått riktig ille med det som ble investert i Frankfurt og St. Petersburg. Brown et al. (1995) mener det derfor blir feil å bruke data fra at marked *gitt* at det har overlevd alt av kriger og revolusjoner, og at en god del av risikopremien kan tilskrives usikkerheten rundt markedets overlevelse. Han setter opp en modell som, med realistiske parameterverdier, kan generere en betydelig risikopremie for de markedene som overlever. Li og Xu (2002) finner imidlertid flere svakheter med denne analysen. De setter opp en mer realistisk modell, og finner at denne effekten ikke har signifikant betydning på risikopremien. Intuisjonen bak dette er at dersom usikkerhet rundt markedets overlevelse virkelig skulle ha ført til en signifikant økning i risikopremien, så må sannsynligheten for at markedet går til grunne hvert enkel år være forholdsvis stor, så sannsynligheten for at det skal overleve i hundrevis av år blir meget liten.

Dataserien for reelt konsum har, som nevnt, også sine svakheter. Hvis vi ser bort fra disse måleproblemene, er det fortsatt ikke alle innbyggere som eier aksjer, og hvis den delen av befolkningen som gjør det har mye mer varierende konsum, kan dette gjøre at det ikke blir riktig å bruke de tallene for konsum som Mehra og Prescott gjorde. Mankiw og Zeldes (1991) undersøker dette, og de finner at kun 25% av amerikanerne eier aksjer, og konsumet til disse er mer volatilt og samvarierer mer med avkastningen til aksjemarkedet enn konsumet til de som ikke eier aksjer. Denne effekten er imidlertid ikke sterk nok til å løse problemet til Mehra og Prescott.

Dersom man vedkjenner seg at tallmaterialet er representativt, har de fleste forsøk på løsninger det til felles at de antar strengere forutsetninger enn det Mehra og Prescott gjorde, nemlig at

- representativ agent maksimerer forventet tidsseparabel nytte
- det finnes ingen markedsimperfeksjonismer
- markedene er komplette.

Kravet til en løsning er å forklare lav og stabil risikofri rente og høy risikopremie samtidig som forutsetningene er realistiske. Mehra og Prescott (1985) er en av de mest siterte vitenskapelige artikler, og det finnes talløse forsøk på å løse dette problemet. Det er imidlertid ingen som har kommet opp med en løsning som er bredt akseptert. Siden litteraturen på dette området er meget omfattende, er det selvfølgelig umulig å gi en fullstendig oversikt. Jeg skal likevel se på noen av disse forsøkene.

2.1 Generalisert forventet nytte

En klar svakhet med det rammeverket som er brukt er at det er en sterk sammenheng mellom risikoaversjon og villighet til å flytte konsum mellom ulike tidspunkt. For å illustrere dette skal vi for et øyeblikk se bort fra all usikkerhet, anta at det ikke finnes noen aktiva utenom det risikofrie aktivumet og at denne renten er gitt eksogent. Som mål på agentens villighet til å flytte konsum mellom to perioder bruker vi elastisiteten for intertemporal substitusjon, det vil si elastisiteten til $\frac{c_{t+1}}{c_t}$ med hensyn på R_f:

$$\rho = El_{R_f}\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right) = \frac{R_f}{(\frac{c_{t+1}}{c_t})}\frac{\partial(\frac{c_{t+1}}{c_t})}{\partial R_f} = \frac{\partial \ln(\frac{c_{t+1}}{c_t})}{\partial \ln R_f}$$

Dette uttrykket sier at hvis R_f øker med 1%, så vil $\frac{c_{t+1}}{c_t}$ øke med (tilnærmet) ρ%. Når R_f øker blir vi for det første rikere, og vi vil ønske å konsumere mer i dag, men det blir også mer attraktivt å utsette konsum da vi nå får høyere avkastning. Ser at hvis $\rho < 1$ vil en renteøkning føre til at vi øker konsumet idag mer enn konsumet imorgen, det vil si at inntektseffekten dominerer. Hvis $\rho > 1$ vil substitusjonseffekten dominere, og konsumet imorgen øke mest. Dersom $\rho = 1$ vil inntekts- og substitusjonseffekten oppheve hverandre, og en renteøkning vil føre til at konsumet på de to tidspunktene blir økt akkurat like mye.

Selv om vi nå antar at det kun finnes ett aktivum og vi ser bort fra all usikkerhet, vil uttrykk 1.6 fortsatt gjelde:

$$1 = E[mR_f] = \beta\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\alpha} R_f$$

Ved å ta logaritmen på begge sider og differensiere får man elastisiteten for intertemporal substitusjon:

$$0 = -\alpha\partial\ln\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right) + \partial\ln R_f$$

$$\rho = \frac{\partial \ln(\frac{c_{t+1}}{c_t})}{\partial \ln R_f} = \frac{1}{\alpha} \tag{2.3}$$

Ser herfra at man ikke kan velge relativ risikoaversjon og elastisiteten for intertemporal substitusjon uavhengig av hverandre. Siden vi er grunnleggende utålmodig, vil nok inntektseffekten dominere, så fornuftige anslag på ρ vil være lavere enn 1. Mehra og Prescott (1985) argumenterte også for at fornuftige verdier av α ville være større enn 1, så ved første øyenkast kan vi ikke forkaste modellen som ufornuftig. Det er imidlertid ikke gitt at det skal være en så sterk sammenheng mellom relativ risikoaversjon og villighet til å flytte konsum mellom ulike tidspunkt som uttrykk 2.3 gir uttrykk for, så dette kan representere en svakhet.

Når vi nå har funnet sammenhengen mellom elastisiteten for intertemporal substitusjon og relativ risikoaversjon, kan man komme med en mer innsiktsfull tolkning av uttrykket for den risikofrie renten. Det virker nemlig intuitivt at risikopremien bestemmes av hvor risikoavers representativ agent er, mens villighet til å flytte konsum mellom ulike tidspunkt skal ha betydning i bestemmelsen av den risikofrie renten. Det gir derfor mening å uttrykke 2.2 som:

$$r_f \approx -\ln\beta + \underbrace{\frac{1}{\rho}}_{\alpha}\mu_c - \underbrace{\frac{1}{2}\alpha^2\sigma_c^2}_{\text{føre}-\text{var}}$$

Ser her at jo lavere ρ er, det vil si jo mindre villig representativ agent er til å flytte konsum fremover, desto høyere blir $\frac{1}{\rho}$ og følgelig også den risikofrie renten. Dette skjer fordi representativ agent fortsatt ikke har noen å handle med og konsumet i hver periode er fortsatt gitt, så renten må bli høy for å forhindre vedkommende fra å låne penger som ikke finnes. Det vil fortsatt være fornuftig å se på føre-var-effekten som noe som er avhengig av risikosmak, da en som er mer risikoavers fortsatt vil ønske å spare mer for å sikre seg mot nettopp usikkerhet.

Problemet er, som sagt, at med det rammeverket vi har brukt til nå, kan ikke ρ og α bestemmes uavhengig av hverandre. Dersom dette var mulig, hadde vi kunnet sette α høy for å forklare den høye risikopremien, føre-var-leddet i uttrykket for renten ville fortsatt ha blitt lite fordi σ_c^2 er lav, men siden vi fortsatt kan velge ρ fritt, kunne vi ha tilpasset denne den lave observerte renten, uten å måtte sette β større enn 1. Dette gir imidlertid ingen garanti for at α får en realistisk verdi på rundt 2, men det vil innebære at man kan tilpasse parametrene på en slik måte at risikofri rente blir lav samtidig som forventet risikopremie blir høy uten at β overstiger 1.

Epstein og Zin (1989) utviklet et rammeverk for generalisert forventet nytte, og her kan man nettopp velge en parameter for relativ risikoaversjon og en annen parameter for elastisiteten til intertemporal substitusjon. Nytten på hvert tidspunkt er gitt av en ikkelineær sammenheng mellom dagens konsum og fremtidig ukjent nytte:

$$U_t = [(1-\beta)c_t^b + \beta(E_t U_{t+1}^a)^{\frac{b}{a}}]^{\frac{1}{b}} \quad a, b < 1 \quad a, b \neq 0 \tag{2.4}$$

Her kan man vise at elastisiteten for intertemporal substitusjon $\rho = \frac{1}{1-b}$, og relativ risikoaversjon $\alpha = 1 - a$. At dette er en generalisering av det rammeverket vi har brukt til nå, kan sees ved å ta utgangspunkt i den sammenhengen mellom relativ risikoaversjon og elastisiteten for intertemporal substitusjon vi hadde i utgangspunktet, nemlig $\alpha = \frac{1}{\rho}$. Dette er oppfylt når $a = b$, og innsettelse i uttrykk 2.4 gir:

$$U_t = [(1-\beta)c_t^a + \beta(E_t U_{t+1}^a)]^{\frac{1}{a}}$$

Ved å sette inn for U_{t+1} får man:

$$U_t = [(1-\beta)c_t^a + (1-\beta)\beta E_t c_{t+1}^a + (1-\beta)\beta^2 E_t U_{t+2}^a]^{\frac{1}{a}}$$

Ved å fortsette å substituere seg fremover og ved å sette inn for $a = 1 - \alpha$, ender man opp med

$$U_t = [(1-\beta)E_t \sum_{s=0}^{T} \beta^s c_{t+s}^{1-\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}} \sim E_t \sum_{s=0}^{T} \beta^s \frac{1}{1-\alpha} c_{t+s}^{1-\alpha},$$

hvor den siste omskrivningen er gyldig fordi det ikke er nyttenivået i seg selv som er interessant, men hvordan ulike valg blir rangert.

At generalisert forventet nytte ikke løser problemet til Mehra og Prescott viste Weil (1989). Han finner støtte i litteraturen for at et realistisk anslag på elastisiteten for intertemporal substitusjon er $\rho = 0,1$. Hvis vi går tilbake til den enkle økonomien som ble beskrevet ovenfor, så betyr en slik ρ at det er inntektseffekten som dominerer sterkt ved en renteøkning, konsumet idag øker vesentlig mer enn konsumet imorgen. Dette er altså en forholdsvis lav verdi, vedkommende er meget lite villig til å flytte konsum mellom ulike tidspunkt.

Ved å bruke dette anslaget på ρ sammen med det at det er fornuftig at α ligger rundt 2, får Weil ved å bruke generalisert forventet nytte ut en risikopremie i samme størrelsesorden som de 0,35% som Mehra og Prescott fikk. Dette løser altså ikke risikopremiemysteriet, og er helt i tråd med intuisjonen om at det er den relative risikoaversjonen som skal avgjøre risikopremien. Den risikofrie renten han får ut blir derimot på hele 20-25%, altså høyere enn det Mehra og Prescott fikk ut ved å bruke samme verdier for α. Dette resultatet har heller ikke samme begrensning som resultatet til Mehra og Prescott, nå er nemlig ikke risikofri rente høy fordi risikopremien er høy, den predikerte risikofrie renten er høy på selvstendig grunnlag. Den observerte risikofrie renten er som nevnt tidligere 0,8%. Dette er meget lavt, og stikk i strid med hva denne modellen sier.

Siden elastisiteten for intertemporal substitusjon er forholdsvis lav, betyr dette også at representativ agent vil ha mest mulig jevnt konsum over *tid*.

Veksten i økonomien er imidlertid meget høy, og selv om vekst i seg selv høres positivt ut, representerer dette ujevnt konsum over tid, noe vår agent misliker. En slik agent ville derfor ha ønsket å låne nå når konsumet var lavt, og betale tilbake i fremtiden når konsumet var høyt og dette ville ha presset likevektsrenten opp. Modellen kan altså ikke forklare hvorfor den observerte renten er så lav, når veksten i økonomien er så høy og når vi misliker ujevnt konsum over tid såpass sterkt. Dette er Weil sitt risikofri rentemysterium.

2.2 Levestandard

Med tidsseparabel nytte påvirker ikke konsumet på ett tidspunkt nytten på et annet tidspunkt. Dette kan som sagt være en svakhet, det kan tenkes at høyt konsum igår, alt annet like, både kan gjøre nytten av konsum i dag høyere og lavere. Nytten idag blir høyere hvis vi er så 'mett' fra gårsdagen at vi fortsatt har glede av dette idag, men hvis det høye konsumet igår gjorde oss mer bortskjemt, vil nytten av dagens uendrede konsum bli lavere. Modeller som bygger på vanedannelse går videre med den siste idéen. Hvor stor nytte man får fra en viss mengde konsum, antar man altså er avhengig av vedkommendes levestandard. Alt annet like, vil høyere levestandard gi lavere nytte av et gitt konsumnivå. Levestandarden, eller vanen, er avhengig av konsumnivået i tidligere perioder. Dette myker altså opp på Mehra og Prescott sin forutsetning om at nytten er tidsseparabel.

Vane har både blitt modellert til kun å være avhengig av det konsumet hver enkelt agent har hatt tidligere, og av det tidligere samlede konsumet til alle agentene i økonomien. Å gjøre det på den første måten gjør alt mye mer komplisert. Før en person bestemmer seg for å kjøpe noe, må vedkommende også ta hensyn til hvordan dette vil skjemme henne bort ved at hun får lavere nytte av konsum i fremtiden. Ved å gjøre det på den andre måten får vi likevel frem essensen med vanedannelse, nemlig at det er endringer i nivået på konsumet snarere enn konsumnivået i seg selv som gir nytte. Idéen bak modellen kan illustreres ved å se på finanskrisen i slutten av 2008. I det påfølgende året falt konsumet, alle tok dette svært tungt og endte opp med lav nytte. Sett i et lengre perspektiv er likevel året etter finanskrisen et av de årene hvor nivået på konsumet har vært høyest. Dersom konsumnivået for 2009 hadde kommet for ikke så altfor mange år siden, hadde dette blitt sett på som meget bra, og nyttenivået hadde blitt sett på som høyt. Da finanskrisen kom hadde man imidlertid vendt seg til et høyere konsumnivå, så fallet i konsum det påfølgende året ble likevel opplevd som smertefullt.

De mest betydningsfulle artiklene som bruker vanedannelse til å prøve og forklare risikofri rente- og risikopremiemysteriet er Constantinides (1990) og Campbell og Cochrane (1999). Begge artiklene klarer å forklare høy risikopremie og lav risikofri rente. Mange modeller som bygger på vanedannelse får ut en meget volatil risikofri rente, og dette stemmer dårlig med hva som er observert. Modellen til Campbell og Cochrane har ikke denne svakheten. Det er flere forskjeller på dem også. Constantinides bruker en modell i kontinuerlig tid, forutsetter at det kun er agentens eget konsum som er vanedannende og han har også med produksjonsmidler og investeringer. Campbell og Cochrane bruker en modell i diskret tid, antar at det er konsumet i økonomien som helhet som er vanedannende, og har ikke med produksjonsmidler og investeringer. Denne modellen er derfor enklere og ligger nærmere opp til modellen Mehra og Prescott brukte, så jeg skal se nærmere på denne. Begge følger imidlertid samme prinsipp, nemlig at nytten på hvert tidspunkt er gitt av

$$u(c_t, x_t, t) = u(c_t - x_t) = \beta^t \frac{(c_t - x_t)^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha},$$

hvor x_t er vanen eller levestandarden på tidspunkt t. Dette er en funksjon av tidligere tiders konsum, og den er satt opp på en slik måte at den alltid vil være lavere enn c_t. Det verst tenkelige som kan skje for en person som har en slik nyttefunksjon, er at konsumet bare blir litt høyere enn det vedkommende er vant til.

Intuisjonen bak modellen kommer godt frem ved å se på Arrow-Pratt-målet for relativ risikoaversjon:

$$RRA_t = -c_t \frac{u_{cc}}{u_c} = c_t \frac{\alpha(c_t - x_t)^{-\alpha-1}}{(c_t - x_t)^{-\alpha}} = \frac{\alpha}{s_t} \quad \text{hvor} \quad s_t = \frac{c_t - x_t}{c_t} \tag{2.5}$$

Forholdet mellom overskuddskonsum og konsum, s_t er et tall mellom 0 og 1. Dersom konsumet er mye høyere enn vanen, vil dette tallet nærme seg 1, men når vi derimot har havnet den meget ugunstige situasjonen at konsumet nesten er på samme nivå som vanen, vil s_t være nesten 0. Ser fra uttrykk 2.5 at relativ risikoaversjon er avhengig av s_t og følgelig tid og tilstand. På de tidspunktene og tilstandene hvor vårt konsum er langt over vanen, vil vi være lite risikoaverse. Når konsumet vårt derimot nærmer seg vanen, vil vi bli veldig redde for at konsumet skal falle ytterligere, relativ risikoaversjon vil stige over alle grenser og vi vil være meget lite lysten på å påta oss noe risiko.

I uttrykket for den risikofrie renten inngår relativ risikoaversjon, og hvis denne i enkelte perioder kan vokse mot uendelig, mens den i andre perioder kan være lav, skulle man tro at dette skulle føre til en meget volatil risikofri rente. I dårligere tider, når konsumet nærmer seg vanen og vi har det ganske ille, vil vi ønske å låne penger og betale disse pengene tilbake når de gode tidene kommer. Dette vil føre til at renten blir presset opp. Når tidene er dårligere, er det imidlertid ingenting som hindrer dem i å bli enda dårligere. Dette ville ført oss enda nærmere vanen, og nytten vår ville nådd nye bunnivå. For å unngå å havne i dette uføret, vil vi være føre var og begynne å spare mer. Jo nærmere vi er vanenivået, desto mer risikoavers vil vi være og følgelig mer vil vi ønske å spare for å være føre var. Denne effekten alene vil derfor presse renten ned i dårligere tider. Knepet Campbell og Cochrane anvendte for å få ut konstant risikofri rente var å sette opp s_t på en slike måte at disse effektene akkurat opphevet hverandre.[1] Ved å bruke en fremgangsmåte av samme idé som i avsnitt 1.4, får de ut

$$r_f = -\ln\beta + \alpha\mu_c - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\overline{s}}\right)^2 \sigma_c^2$$
$$Er - r_f = \frac{\alpha}{\overline{s}}\sigma_c\sigma_r,$$

hvor $\overline{s}$ er en konstant. Ser herfra at dersom man velger en lav verdi for α og en lav verdi for $\overline{s}$ kan man få ut høy risikopremie og fordi σ_c fortsatt er et lite tall, får man også ut lav risikofri rente.

Campbell og Cochrane har altså laget en modell som er vellykket i den forstand at den både forklarer den stabilt lave renten og den høye risikopremien. Er dette løsning på Mehra og Prescott sitt problem? Dette er avhengig av om vi vil erkjenne at vanedannelse er så viktig som denne modellen forutsetter. Når konsumet nærmer seg vanen, blir den effektive relative risikoaversjonen meget høy, og hvis vi hadde problemer med å forstå at folk kunne være så risikoaverse i utgangspunktet, så skal nok ikke det at konsumet nærmer seg et visst nivå endre på denne oppfatningen.

2.3 Finansielle katastrofer

En teknisk detalj i Mehra og Prescott (1985) er at de antok at vekstraten til konsumet følger en Markovkjede med to tilstander. Her kan vestfaktoren enten være høy eller lav, hvorvidt den blir høy eller lav i neste periode, kan være avhengig av hvilken tilstand vi er i idag, men ikke av hva den har vært tidligere. Følgende tilstandsmatrise og overgansvektor ble brukt:

[1] For detaljer, se Campbell og Cochrane (1999)

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1+\mu+\delta \\ 1+\mu-\delta \end{pmatrix} \qquad \Phi = \begin{pmatrix} \phi & 1-\phi \\ 1-\phi & \phi \end{pmatrix}$$

I den gode tilstanden er vekstfaktoren for konsum $1+\mu+\delta$, og derom man for eksempel vet at man er i denne tilstanden, så er sannsynligheten ϕ for at man også skal få denne høyre veksten i neste periode, mens man får den lave vekstfaktoren med sannsynlighet $1-\phi$. Dersom $\phi = \frac{1}{2}$ har vi lik sannsynlighet for å havne i de to ulike tilstandene og det vil ikke være noen autokorrelasjon. Hvis $\phi > \frac{1}{2}$ betyr dette at det er større sannsynlighet for at vekstraten neste år blir den samme som i år, og vi vil få positiv autokorrelasjon, så ϕ bestemmer hvor mye autokorrelasjon vi får i modellen. Dersom δ er stor, vil det være stor variasjon i konsumveksten, og dersom μ er høy vil forventet vekst være høy, og så videre. Mehra og Prescott brukte så data til å estimere parametrene i modellen slik at denne prosessen får samme forventning, varians og første ordens autokorrelasjon som de observerte dataene.

Rietz (1988) tok dette ett steg videre. Istedenfor kun to tilstander, innføre han en tredje tilstand, nemlig en katastrofetilstand. Denne tilstanden inntreffer med lav sannsynlighet, og vil medføre en kraftig nedgang i konsumet. Markovkjeden til Mehra og Prescott ble dermed endret til:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1+\mu+\delta \\ 1+\mu-\delta \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad \Phi = \begin{pmatrix} \phi & 1-\phi-\eta & \eta \\ 1-\phi-\eta & \phi & \eta \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Dette har samme mening som i sted. Dersom vi, for eksempel, opplevde høy vekst i konsum i denne perioden, er sannsynligheten ϕ for at vi også vil oppleve høy vekst i neste periode, sannsynligheten for at vi skal oppleve lav vekst blir $1-\phi-\eta$ og sannsynligheten for en katastrofe blir η. Dersom det var en katastrofe i inneværende perioden, antok Rietz for enkelthets skyld at man i neste periode får høy og lav vekst med lik sannsynlighet, og at det ikke vil komme to katastrofer etter hverandre. Parameteren λ_3 angir vekstfaktoren i et katastrofeår. Siden en katastrofe innebærer en stor nedgang i konsumet, vil denne parameteren være betydelig lavere enn 1.

Det er fortsatt forutsetningene fra Mehra og Prescott (1985) som gjelder, vi har kun én agent, vedkommende har ingen å handle med og får på hvert tidspunkt et konsumnivå gitt utenfra modellen. Dersom katastrofen inntreffer, vil agenten oppleve en ekstrem nedgang i konsumet. Dette gjør det risikable aktivumet mindre attraktivt, og det risikofrie aktivumet mer attraktivt da dette gir en viss reell avkastning uansett og vil således være en god beskyttelse mot den ekstremt uønskede situasjonen som oppstår når katastrofen inntreffer. Idéen til Rietz er å se om muligheten for en slik katastrofe gjør agenten indifferent mellom å låne og ta opp lån selv til en forholdsvis lav risikofri rente, samtidig som risikopremien er høy og relativ risikoaversjon og tidspreferanse har fornuftige verdier.

Hvor stor sannsynligheten for en slik katastrofe skal være, og hvor stor nedgang i konsum dette skal føre til, er noe som er vanskelig å estimere. Grunnen til dette er at en slik katastrofe er en sjelden hendelse av natur, og det er usikkert om vi vil ha nok representativ data for å kunne estimere dette. Rietz finner derfor risikofri rente og risikopremie med mange forskjellige verdier på alle parametrene som ikke kan måles, for så å se på hvilke valg av parametre som gir fornuftig risikofri rente og risikopremie. I sin artikkel kommer han med en lang liste over forskjellige mulige kombinasjoner, og noen av de mest interessante av disse er gjengitt i tabell 2.2.

Fra disse tallene ser man at dersom en katastrofe fører til en nedgang i konsumet på 25%, det vil si at konsumet i et katastrofeår er 75% av hva det var året før så $\lambda_3 = 0,75$, får man ut en risikofri rente og risikopremie

λ_3	η	α	β	r_f	$Er - r_f$
0,75	0,0100	9,80	0,999	0,74%	6,95%
0,75	0,0140	8,85	0,999	0,84%	6,49%
0,51	0,0008	7,00	0,999	0,83%	6,18%
0,51	0,0010	6,70	0,996	0,84%	6,15%
0,51	0,0030	5,30	0,980	0,89%	6,15%
0,02	0,0001	1,59	0,960	0,86%	6,17%
0,02	0,0002	1,43	0,956	0,82%	6,37%

Tabell 2.2: Utvalg av mulige parameterverdier fra Rietz (1988)

som stemmer godt med hva som er observert, samtidig som tidspreferanseparameteren blir realistisk. Ser også at jo høyere sannsynligheten for en slik katastrofe er, desto lavere blir den relative risikoaversjonen som behøves for å forklare gitt risikofri rente, risikopremie og λ_3. Dette virker fornuftig, da høy sannsynlighet for katastrofe vil gjøre det risikofrie aktivumet mer attraktivt og det risikable mindre attraktivt for risikoaverse personer. Det fremgår også fra tabellen at dersom en finansiell katastrofe skulle medføre at konsumet ble nesten halvvert, så kan sannsynligheten for at en slik katastrofe skal inntreffe være vesentlig lavere. Det er imidlertid først når konsumet i et katastrofeår kun er 2% av hva det var året før, at man får ut relativ risikoaversjon i nærheten av 2 samtidig som β er fornuftig og risikofri rente og risikopremie er nær de observerte størrelsene.

Så, er dette realistisk? Som det ble påpekt av Mehra og Prescott (1988) har oppsettet og tallene man får ut flere svakheter. I modellen til Rietz er det snakk om meget omfattende fall i konsum, mye større enn for eksempel den store depresjonen på 30-tallet. Dersom et slikt fall skulle komme i fremtiden, er det usikkert hvor sikkert det risikofrie aktivumet faktisk er. Når du i virkeligheten plasserer penger til risikofri rente, er det vanligvis en *nominell* rente du gjør avtale om. Den risikofrie renten er derfor ikke helt risikofri, da man ikke vet hva inflasjonen blir når man plasserer pengene. En stat som har utstedt statsobligasjoner kan, hvis en slik krise skulle inntreffe, trykke opp penger eller rett og slett la være å betale. Dette så man under finanskrisen, da den amerikanske sentralbanken trykket opp enorme mengder penger. Dette er bemerkelsesverdig, da amerikanske statskasseveksler ble regnet som meget sikre investeringer. I sammenhengen til Rietz blir nok finanskrisen mer krise enn katastrofe, men dette illustrerer likevel at intet aktivum er risikofritt dersom en krise eller katastrofe skulle inntreffe. Siden konsumfallet til Rietz er såpass stort, kan det tenkes at det kun vil kunne inntreffe i forbindelse med krig, og da er det heller ikke gitt at staten som utstedte obligasjonene i det hele tatt vil være der og holde sin del av avtalen. Man kan derfor konkludere med at det 'risikofrie' aktivumet høyst sannsynlig ikke vil fungere etter hensikten dersom en slik katastrofe skulle inntreffe.

Dersom man ser bort fra disse praktiske innvendingene, og antar at det risikofrie aktivumet faktisk er helt risikofritt og gir samme reelle avkastning uansett, er det fortsatt noen problemer med tallene i tabell 2.2. Selv om Mehra og Prescott begrenset den relative risikoaversjonen oppad til å være 10, er de mest realistiske verdiene på denne parameteren rundt 2. For at Rietz skal komme i nærheten av dette, må konsumet bli redusert med 98% dersom en katastrofe inntreffer, og et slikt fall har aldri blitt observert i USA. Dersom vi begrenser oss til mer moderate katastrofer, er Rietz fortsatt et godt stykke unna en relativ risikoaversjon på rundt 2, men det er likevel et interessant resultat at man kan få lav risikofri rente og høy risikopremie ved å innføre muligheten for en slik katastrofe. Mehra og Prescott (1988) tok opp disse problemene og var generelt svært kritisk til artikkelen til Rietz.

Barro (2005) hevder imidlertid at de var for kritiske og at Rietz var inne på noe. Barro setter også opp en rikere modell, og han forsøker også å estimere sannsynligheten for at en katastrofe skal inntreffe.

2.4 Ukomplette og imperfekte markeder

Mehra og Prescott (1985) antok at markedene er perfekte. Dette betyr at det ikke er noen transaksjonskostnader, man kan kjøpe og selge et aktivum til samme pris, det finnes ingen grenser for hvor mye man kan låne og så videre. I virkeligheten er også dette langt fra oppfylt, så dette kan også være en mulig forklaring på problemet.

I modellen til Mehra og Prescott blir det brukt en representativ agent, og det er denne representative agenten vi finner risikoaversjon og tidspreferanse til. Dersom alle mennesker var helt like, hadde samme formue, samme informasjon og samme oppfatninger om sannsynlighetsfordelingene til de ulike aktivaene, så er det klart at å anta at det fantes en representativ agent hadde gitt mening helt uten videre, da den representative agenten ville hatt samme preferanser som hver enkelt agent. At alle er like i så mange dimensjoner er selvfølgelig langt fra tilfellet i virkeligheten. Det finnes imidlertid andre situasjoner hvor tilnærmingen med en representativ agent er fornuftig, og det er når markedet er komplett.

Et marked er komplett dersom det finnes like mange forskjellige aktiva som det finnes tilstander. Hvilken tilstand som inntreffer er usikkert, men dersom markedene er komplette, kan vi ta for oss en *vilkårlig* tilstand, bestemme oss for hvor stor utbetaling vi ønsker i denne tilstanden for så å handle i markedet slik at vi faktisk får denne utbetalingen dersom denne tilstanden inntreffer. I den virkelige verden kan vi for eksempel inngå kontrakter som gir oss en utbetaling dersom huset vårt brenner ned eller hvis oljeprisen skulle bli høy. Hvis markedet virkelig var komplett, kunne man altså ha inngått en forsikringskontrakt for *enhver* situasjon. Dette er åpenbart ikke tilfellet, og det kanskje viktigste unntaket er i forbindelse med lønn og arbeidsledighet. Ingen forsikrer vil skrive kontrakt med en arbeidstaker hvor forsikrer forplikter seg til å betale ut en sum dersom arbeidstaker skulle bli arbeidsledig eller få lav bonus. Dette fordi en slik forsikringskontrakt vil for det første tiltrekke seg de arbeidstakerne som har høyest sannsynlighet for å bli arbeidsledig (ugunstig utvalg), og etter at kontrakten er inngått, vil ikke arbeidstaker legge særlig mye innsats i å beholde jobben eller gjøre seg fortjent til høy bonus (moralsk hasard). Vi kan derfor konkludere med at markedene ikke er komplette i virkeligheten.

Dersom et marked består av mange heterogene aktører, gir det mening å aggregere disse til en representativ agent derom markedet er komplett. Dette viser blant andre Constantinides (1982). Idéen bak er at dersom markedet er komplett, så vil alle aktørene foreta en risikodeling slik at alle får lik marginalnytte. Antagelsen til Mehra og Prescott (1985) om at det finnes en representativ agent blir derfor fornuftig dersom markedet er komplett.

Weil (1992) tar utgangspunkt i en enkel énperiodisk modell, ikke ulik den som ble brukt i avsnitt 1.2. Nå antar han imidlertid at det finnes mange like agenter, på tidspunkt 0 har alle en lik beholdning aksjer og fått utbetalt lik lønn som tilsammen utgjør en kjent formue e. På tidspunkt 0 skal hver enkelt agent velge hvor mye av hvert aktivum hun ønsker å kjøpe, men siden alle er like, er det ikke noe poeng i å skille disse fra hverandre. Det som er nytt i Weil sin modell er at nå får hver enkelt agent en stokastisk lønnsutbetaling

y på tidspunkt 1. Hver enkelt agents problem blir da:

$$\max_{\{\theta_i\}} u(c_0) + \beta E[u(c_1)] \quad u.b. \quad \begin{cases} c_0 = e - \sum_{i=1}^n \theta_i p_i \\ c_1 = y + \sum_{i=1}^n \theta_i x_i \end{cases}$$

Siden alle disse agentene er risikoaverse, så er det åpenbart at de heller ville ha hatt forventningen til y, enn y selv. Dersom det ikke hadde vært noen problemer med moralsk hasard kunne nemlig agentene på tidspunkt 0 inngått en avtale om at de på tidspunkt 1 betaler inn lønnen i en stor pott, for så å få utbetalt en lik andel av denne potten. Vi ville dermed hatt nøyaktig samme situasjon som i avsnitt 1.2, og risikopremie og risikofri rente ville blitt det samme som før.

Så ser Weil på hva som skjer med risikopremie og risikofri rente til hele økonomien dersom det, som i den virkelige verden, ikke er mulig for hver enkelt agent å gjøre noe med den risikoen fremtidig lønn medfører, slik at vi får ikkediversifiserbar bakgrunnsrisiko. Dersom dette fører til lavere risikofri rente og høyere risikopremie enn det som Mehra og Prescott (1985) fikk da de antok at markedet var komplett, kan dette gi verdifull innsikt. Weil finner at dersom man antar at markedet er komplett når hver enkelt agent i virkeligheten sitter med udiversifiserbar lønnsinntekt, vil

- predikert risikofri rente bli for høy hvis og bare hvis $u'''(\,\cdot\,) > 0$
- predikert risikopremie bli for lav hvis både absolutt risikoaversjon og absolutt prudence er synkende i formue

For å forklare hva dette betyr må vi se litt grundigere på nyttefunksjonen og dens egenskaper. Risikoaversjon sier noe om en agents *holdning* til usikkerhet, prudence, derimot, sier noe om hvordan en agent *forbereder* seg på usikkerhet. Dette kan illustreres ved å se på hvordan en agent velger å endre sin sparing i en enkel énperiodisk modell i forbindelse med usikkerhet. Modelloppsettet er det samme som før. På tidspunkt 0 velger agenten hvilket beløp θ hun ønsker å spare, formuen hennes er w_0, så konsumet hennes på tidspunkt 0 blir $w_0 - \theta$. På tidspunkt 1 får hun tilbake det hun har spart, og for enkelthets skyld antar vi at renten er 0%. I tillegg får hun en usikker lønnsutbetaling y. Agenten sitt problem blir dermed

$$\max_{\theta} u(w_0 - \theta) + \beta E[u(y + \theta)],$$

dette problemet løses på samme måte som tidligere, og vi ender opp med førsteordensbetingelsen

$$u'(w_0 - \theta) = \beta E[u'(y + \theta)]. \tag{2.6}$$

Så gir vi henne mulighet til å få forventningen til den usikre lønnsutbetalingen mot en 'avgift' ψ på tidspunkt 1, og vi skal nå se på hvordan dette endrer hennes sparing. Nå blir vedkommendes problem

$$\max_{\theta} u(w_0 - \theta) + \beta u(E[y] + \theta - \psi)$$

og dette gir førsteordensbetingelsen

$$u'(w_0 - \theta) = \beta u'(E[y] + \theta - \psi). \tag{2.7}$$

Ved å sette høyresidene i de to førsteordensbetingelsene 2.6 og 2.7 lik hverandre får vi

$$u'(E[y] + \theta - \psi) = E[u'(y + \theta)].$$

Å få sikker lønn samtidig som man får redusert sitt konsum med ψ, vil ha samme effekt på sparing som når man får usikker lønn. Man kan derfor tolke ψ som en føre-var-premie. Dette uttrykket likner veldig på hva vi hadde som utgangspunkt da vi fant et uttrykk for risikopremien i avsnitt 1.1. Ved å foreta en Taylorapproksimasjon rundt $E[y] + \theta$, og ellers bruke samme fremgangsmåte som i avsnitt 1.1, får vi et uttrykk for føre-var-premien ψ:

$$\psi \approx -\frac{1}{2}\frac{u'''(E[y] + \theta)}{u''(E[y] + \theta)}\sigma_y^2 = \frac{1}{2}P(E[y] + \theta)\sigma_y^2 \quad \text{hvor} \quad P(w) = -\frac{u'''(w)}{u''(w)}$$

Dersom man blir utsatt for mer risiko, er det naturlig at man ønsker å spare mer for å forberede seg på de usikre tidene som kommer. Det er derfor naturlig at føre-var-premien er positiv. I avsnitt 1.1 argumenterte vi for at $u''(w) < 0$, så for at føre-var-premien skal bli positiv, må $u'''(w) > 0$. Kravet til Weil for at predikert risikofri rente skulle bli for høy, dersom man antok at markedene var komplette når de i virkeligheten ikke er det, var nettopp at $u'''(w) > 0$. Når markedene ikke er komplette, så blir man utsatt for mer risiko da man ikke kan forsikre seg mot svingninger i lønnsutbetalingene. Dette vil føre til at man vil være føre-var og spare mer derom $u'''(w) > 0$, og dette vil igjen presse likevektsrenten ned.

Personer som er mer føre-var, vil være villig til å betale en høyere føre-var-premie, så $P(w)$ vil være et godt mål på hvor prudnet man er. Siden ψ er et beløp, definerer Kimball (1990) størrelsen $P(w)$ som absolutt prudence. Dette blir altså helt analogt til absolutt risikoaversjon i uttrykk 1.1. På samme måte som at det er fornuftig at risikopremien går ned når man blir rikere, altså at absolutt risikoaversjon er synkende, er det også naturlig at føre-var-premien går ned når formuen øker. Dette er oppfylt når $P'(w) < 0$, det vil si at for fornuftige nyttefunksjoner må absolutt prudence være synkende. Kriteriene til Weil for at predikert risikopremie skulle bli for lav, var nettopp at både absolutt risikoaversjon og absolutt prudence skulle være synkende, og vi har nå sett at dette er oppfylt for alle fornuftige nyttefunkskoner. Dette gjelder også for nyttefunksjonen Mehra og Prescott (1985) brukte, da man lett kan vise at $P(w) = (\alpha + 1)w^{-1}$ og at dette er en funksjon som er synkende i w.

Modellen til Weil består kun av to tidspunkt, og i slutten av perioden opphører verden å eksistere. Dette er en svakhet av samme grunn som tidligere. Heaton og Lucas (1996)[2] gjør en omfattende analyse av hvordan imperfekte og ukomplette markeder påvirker risikopremie og risikofri rente i en verden som består av mange perioder og mange agenter. Når vi har flere perioder blir ikke effekten av ukompletthet like entydig. I den énperiodiske modellen vil noen agenter ha hatt flaks og fått høy lønn, andre ville ha hatt mindre flaks og fått lav lønn, og siden lønnsutbetalingen faller sammen med verdens ende, er det ingenting de enkelte agentene kan gjøre med dette. Når vi derimot har flere perioder blir dette annerledes. Nå får nemlig hver agent lønn på flere tidspunkt, og hvis lønnsutbetalingene på ulike tidspunkt ikke er særlig avhengig av hverandre, og hvis vi har tilstrekkelig mange tidspunkt, så vil det også være rimelig å tro at hver agent i det lange løp vil få omtrent like mye utbetalt. Dette gjør at dersom en agent på ett tidspunkt har uflaks og får lav lønn, kan vedkommende låne penger og betale dem tilbake senere. Dette kan sees på som om hver agent legger sine lønnsutbetalinger på forskjellig tidspunkt i en stor pott, for så på hvert tidspunkt betale ut igjen en viss andel av dette til seg selv, uavhengig av hvor mye lønn vedkommende faktisk fikk på dette tidspunktet. På den måten kan agentene forsikre seg selv og markedene er å anse som komplett igjen.

Betingelsen for dette er selvfølgelig at lønnsutbetalingene på ulike tidspunkt er rimelig uavhengige. Dersom det er stor grad av avhengighet, det vil si at hvis en agent fikk lav lønnsutbetaling på ett tidspunkt, så vil hun også få lave utbetalinger i mange perioder fremover, så blir ikke dette bildet like klart. Det mest ekstreme er at et sjokk aldri dør ut. Dersom en agent får redusert sin lønn med et gitt beløp for resten av sitt liv, så må vedkommende også redusere sitt konsum med tilsvarende. Da er vi tilbake i situasjonen

[2] Lucas refererer i dette underkapittelet til Deborah Lucas.

beskrevet av Weil, nemlig at fravær av komplette markeder får betydning for risikofri rente og risikopremie. Hvor vedvarende sjokkene i lønnsutbetalingene er vil derfor avgjøre om markedene er å anse som komplette eller ikke, og følgelig om ukomplette markeder kan brukes til å forklare Mehra og Prescott sitt problem.

Å modellere markedsimperfeksjoner er vanskelig fordi det er mye rart som inngår her. Hvis markedet var perfekt, skulle det vært mulig å kjøpe og selge til samme pris, uten noen former for kostnader. I virkeligheten finnes det vanligvis en bid/ask-spread, og man må betale kurtasje for å handle aksjer. Dersom man prøver å kjøpe eller selge store mengder aksjer, vil dette bevege prisen. For å få med denne effekten, og samtidig få en forholdsvis enkel kostnadsfunksjon for å gjøre beregningene så enkle som mulig, valgte Heaton og Lucas en kvadratisk kostnadsfunksjon:

$$\kappa_t = k_t[(s^i_{t+1} - s^i_t)p^s_t]^2$$

Her er p^s_t prisen på aksjen, $s^i_{t+1} - s^i_t$ er den beholdningsendringen agent i gjør i perioden, og k_t er en parameter. Ser herfra at å selge eller kjøpe store kvanta blir forholdsvis dyrt, mens kjøp og salg av små kvanta er billig. Særlig det siste, og fravær av faste kostnader er kanskje ikke helt realistisk, men Heaton og Lucas argumenterer for at små transaksjoner uansett ikke ville ha påvirket risikopremie og risikofri rente i nevneverdig grad.

Når privatpersoner låner penger av en bank, så betaler disse vesentlig mer rente enn hva banken kan låne penger for. Selv etter at man har justert for at lån til konsumenter ikke er helt risikofritt, er det fortsatt rimelig å anta at de som låner penger blir påført vesentlig større kostnader enn banken som låner ut. For få med dette inn i kostnadsfunksjonen, bruker Heaton og Lucas kostnadsfunksjonen

$$\omega_t = \Omega_t \min(0, b^i_{t+1}p^b_t)^2,$$

hvor b_{t+1}^i er lånebeløpet til agent i, hvilket er positivt for långiver og negativt for lånetaker, p_t^b er renten og Ω_t er en parameter. Med denne kostnadsfunksjonen vil dermed ikke lånegiver ha noen kostnader. Her er det ikke lenger endringen, men hele det utestående lånet som avgjør kostnaden til lånetager. Dette fordi de dominerende kostnadene med å ha lån ikke er transaksjonskostnader, men det faktum at man betaler for høy rente. Heaton og Lucas gjorde for sammenlikningens skyld også analysen med en symmetrisk kostnadsfunksjon, uten at dette gav opphav til store forskjeller i resultatet.

Siden kostnadene til lån rammer skjevt, vil det bli mindre attraktivt for lånetakere å låne penger og likevektsrenten vil bli presset ned. Hvilken effekt transaksjonskostnadene i aksjemarkedet har, er ikke like lett å si fordi de rammer både kjøper og selger. Disse markedsimperfeksjonene gir også oppgav til en indirekte effekt på risikofri rente og risikopremie. Fraværet av perfekte markeder gjør det mindre attraktivt å bruke markedene til å selvforsikre seg mot svingninger i lønnsutbetalingene, dette gjør igjen markedet mindre komplett som igjen påvirker risikofri rente og risikopremie.

Dette modelloppsettet blir noe komplisert, så det er ikke mulig å finne noen analytiske løsninger og man må løse modellen numerisk. Heaton og Lucas ser så om det er mulig å få ut risikopremie og risikofrie rente i samme størrelsesorden som de observerte ved å bruke realistiske anslag på relativ risikoaversjon, tidspreferanse, parametrene i kostnadsfunksjonene samt på hvor vedvarende sjokk i lønnsutbetalinger er. Resultatene de får ut går i riktig retning, risikofri rente blir lavere og risikopremien høyere for realistiske parametre, men for at risikofri rente og risikopremie skal komme nært de observerte størrelsene, må transaksjonskostnadene settes urealistisk høyt. I virkeligheten er volatiliteten til aksjemarkedet høyt i forhold til lånemarkedet, og modellen klarer heller ikke å gjenskape denne sammenhengen. Dette kan dermed heller ikke kalles noen løsning, men vi ser at det iallefall er noe som går i riktig retning.

2.5 Kreative løsningsforslag

Det har, som sagt, vært skrevet store mengder litteratur som følge av Mehra og Prescott (1985) sin artikkel, og vi har nå sett på noen av forslagene til løsning. Kreativiteten for å finne en løsning stopper imidlertid ikke her.

McGrattan og Prescott (2001) prøver å løse problemet ved å ta hensyn skatter og avgifter. De setter opp en forholdsvis omfattende modell hvor de blant annet skiller mellom personbeskatning og selskapsskatt, tar hensyn til utviklingen av disse skattesatsene over tid og hvor de tar med fritid i nyttefunksjonen.

Istedenfor å se på alt på konsum under ett, skiller Piazzesi et al. (2006) mellom boligkonsum og annet konsum og tar begge deler med i nyttefunksjonen. Deretter forsøker de å forklare aktivapriser ved å estimere hvor villig en representativ agent er til å substituere mellom de to konsumtypene samt ved å se på hvor stor andel boligkonsum utgjør av samlet konsum.

Constantinidies et al. (1998) ser på hvilken betydning menneskers livsløp har for aktivapriser. De antar at mennesker lever i tre perioder, i den første perioden utdanner de seg, i den andre arbeider de og i den siste er de pensjonister. De som befinner seg i den andre perioden ønsker å holde en veldiversifisert portefølje av aksjer og obligasjoner som skal sikre dem konsum i pensjonisttilværelsen, mens de unge ikke har noe kapital og blir nektet kreditt. Dette legger begrensninger på etterspørselen av de ulike aktivaklassene og vil følgelig ha betydning for prisene.

En vanlig menneskelig egenskap er et tap blir verdsatt mer negativt enn en tilsvarende gevinst blir verdsatt positivt. Når man investerer i aksjemarkedet, vil man forvente positiv meravkastning over tid, men det kan godt hende at man taper endel på kort sikt, og disse kortsiktig tapene vil også mange mislike sterkt. Dette gjør det risikable aktivumet mindre attraktivt, og Benartzi og Thaler (1995) ser på hvilke forutsetninger som må til for at dette skal løse risikofri rente- og risikopremiemysteriet.

Disse artiklene er gode eksempler på hvor kreative enkelte har vært i sine forsøk på å løse Mehra og Prescott sitt problem, og det finnes også mange andre artikler som fortsetter i samme bane. Mange av disse får imidlertid ut høy risikopremie og lav risikofri rente uten at de av den grunn kan karakteriseres som løsninger. Den grunnleggende modellen som gav opphav til risikofri rente- og risikopremiemysteriet er sann, og den skal stemme med virkeligheten *grovt sett*. Det bør for eksempel ikke være nødvendig å ha kjennskap til utviklingen av ulike skattesatser og nærmest trivielle aspekter ved menneskelig psykologi for at modellen i det hele tatt skal komme i nærheten av å stemme med tallene fra virkeligheten.

2.6 Oppsummering

Vi har nå sett at den historiske risikopremien har vært meget høy, avkastningen på aksjemarkedet har vært høy og volatil og avkastningen på det forholdsvis risikofrie aktivumet har vært lav og lite volatil. Ingen modell har klart å gi en fullgod forklaring på hvorfor. Å forstå hvorfor risikopremien har vært så høy er viktig for å kunne forutse hva den blir i fremtiden. Dersom risikopremien har vært høy de siste hundre årene på grunn av flaks, er dette åpenbart av interesse for alle som har planer om å plassere pengene sine i aksjemarkedet. Fernandez (2009a) og Fernandez (2009b) har gjort en omfattende undersøkelse av hvilken risikopremie som ble brukt av henholdsvis et stort antall professorer og lærebøker, og han fant en noe nedadgående trend. Nå er det imidlertid 30 år siden Mehra og Prescott skrev sin artikkel, og en nedadgående trend i risikopremien kommer ikke særlig tydelig frem i datamaterialet. Variansen i målt reelt konsum per innbygger har imidlertid blitt vesentlig redusert i perioden etter andre verdenskrig, og dette gjør en uendret risikopremie vanskeligere å forklare.

Alle de forslagene til løsning vi har sett på har vært forholdvis små endringer på de eksisterende rammeverket. Kocherlakota (1996) mener at en løsning som blir akseptert vil være kjennetegnet av fundamentale forskjeller fra dagens teori. Han har imidlertid ingen idéer om hva disse fundamentale forskjellene kan være.

Appendiks

R-kode brukt til å lage figur 2.3.

```
alfaMin = 0

alfaMax = 30

betaMin = 0.95

betaMax = 1

sigmar = 0.1667

sigmac = 0.0357

muc = 0.0183

antall = 250


k = 1

y=matrix(0,antall^2,4)

colnames(y) <- c("alfa", "beta", "re", "rf")

for(i in 1:antall){

  for(j in 1:antall){

    y[k,"alfa"]=alfaMin+(i-1)*(alfaMax-alfaMin)/antall

    y[k,"beta"]=betaMin+(j-1)*(betaMax-betaMin)/antall

    y[k,"re"]=y[k,"alfa"]*sigmac*sigmar

    y[k,"rf"]=-log(y[k,"beta"])+y[k,"alfa"]*muc-0.5*y[k,"alfa"]^2*sigmac^2

    k = k + 1
```

```
  }
}

z = matrix(0,antall,3)
colnames(z) <- c("re", "rfmin", "rfmax")
for(i in 1:antall){
  z[i,"re"] = y[i*antall,"re"]
  z[i,"rfmin"] = min(y[,"rf"][(1+(i-1)*antall):(i*antall)])
  z[i,"rfmax"] = max(y[,"rf"][(1+(i-1)*antall):(i*antall)])
}

plot(z[,"rfmin"], z[,"re"], "l", xlab="Risikofri rente",
ylab="Risikopremie", xlim=c(0, 0.25), ylim=c(0, 0.25))
koord2 = xy.coords(z[,"rfmax"], z[,"re"])
plot.xy(koord2, "l")
```

Bibliografi

Knut K. Aase. Continuous trading in an exchange economy under discontinuous dynamics: A resolution of the equity premium puzzle. *Scandinavian Journal of Management*, 9(1):3–28, 1993a.

Knut K. Aase. A jump/diffusion consumption-based capital asset pricing model and the equity premium puzzle. *Mathematical Finance*, 3(2):65–84, 1993b.

Knut K. Aase. Forelesningsnotater i faget FIE429 - forsikringsøkonomi. Norges Handelshøyskole, høsten 2008.

Andrew B. Abel. Asset prices under habit formation and catching up with the joneses. *The American Economic Review*, 80(2):38–42, 1990.

Ravi Bansal og Amir Yaron. Risks for the long run: A potential resolution of asset pricing puzzles. *The Journal of Finance*, 59(4):1481–1509, 2004.

Robert J. Barro. Rare events and the equity premium. NBER Working Papers 11310, National Bureau of Economic Research, Inc, May 2005.

Shlomo Benartzi og Richard H. Thaler. Myopic loss aversion and the equity premium puzzle. *The Quarterly Journal of Economics*, 110(1):73–92, 1995.

Michele Boldrin, Lawrence J. Christiano, og Jonas D. M. Fisher. Habit persistence, asset returns, and the business cycle. *The American Economic Review*, 91(1):149–166, 2001.

Alon Brav, George M. Constantinides, og Christopher C. Geczy. Asset pricing with heterogeneous consumers and limited participation: Empirical evidence. *Journal of Political Economy*, 110(4):793–824, 2002.

Douglas T. Breeden. An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities. *Journal of Financial Economics*, 7(3):265–296, 1979.

Stephen J. Brown, William N. Goetzmann, og Stephen A. Ross. Survival. *The Journal of Finance*, 50(3):853–873, 1995.

Iver Christian Båtvik. Equity premium puzzle: 100 years of bad luck. Master's thesis, Universitet i Oslo, 2008.

John Y. Campbell. Consumption-based asset pricing. In G.M. Constantinides, M. Harris, og R. M. Stulz, editors, *Handbook of the Economics of Finance*. Elsevier, 2003.

John Y. Campbell og John H. Cochrane. By Force of Habit: A Consumption-Based Explanation of Aggregate Stock Market Behavior. *Journal of Political Economy*, 107(2), april 1999.

John H. Cochrane. *Asset Pricing*. Princeton University Press, Revised edition, 2005.

George M. Constantinides. Intertemporal asset pricing with heterogeneous consumers and without demand aggregation. *The Journal of Business*, 55 (2):253–267, 1982.

George M. Constantinides. Habit formation: A resolution of the equity premium puzzle. *The Journal of Political Economy*, 98(3):519–543, 1990.

George M. Constantinidies, John B. Donaldson, og Rajnish Mehra. Junior can't borrow: A new perspective on the equity premium puzzle. Technical report, 1998.

Jean-Pierre Danthine og John B. Donaldson. *Intermediate Financial Theory*. Elsevier Academic Press, 2005.

Elroy Dimson, Paul Marsh, og Mike Staunton. The Worldwide Equity Premium: A Smaller Puzzle. *SSRN eLibrary*, 2006.

Avinash K. Dixit. *Optimization in Economic Theory*. Oxford University Press, 1990.

Louis Eckhoudt, Christian Gollier, og Harris Schlesinger. *Economic and Financial Decisions under Risk*. Princeton University Press, 2005.

Steinar Ekern. Forelesningsnotater i faget ECO423 - finansieringsteori. Norges Handelshøyskole, høsten 2008.

Larry G. Epstein og Stanley E. Zin. Substitution, risk aversion, and the temporal behavior of consumption and asset returns: A theoretical framework. *Econometrica*, 57(4):937–969, 1989.

Larry G. Epstein og Stanley E. Zin. Substitution, risk aversion, and the temporal behavior of consumption and asset returns: An empirical analysis. *The Journal of Political Economy*, 99(2):263–286, 1991.

Pablo Fernandez. Market Risk Premium Used in 2008 by Professors: A Survey with 1,400 Answers. *SSRN eLibrary*, 2009a.

Pablo Fernandez. The Equity Premium in 150 Textbooks. *SSRN eLibrary*, 2009b.

Sanford J. Grossman og Robert J. Shiller. The determinants of the variability of stock market prices. *The American Economic Review*, 71(2):222–227, 1981.

Lars Peter Hansen og Ravi Jagannathan. Implications of security market data for models of dynamic economies. *The Journal of Political Economy*, 99(2):225–262, 1991.

Lars Peter Hansen og Kenneth J. Singleton. Stochastic consumption, risk aversion, and the temporal behavior of asset returns. *The Journal of Political Economy*, 91(2):249–265, 1983.

Jørgen Haug. Risikopremiemysteriet. *Praktisk Økonomi og Finans*, (3), 96–103 1999.

Jørgen Haug. Forelesningsnotater i faget FIN429 - asset pricing 1. Norges Handelshøyskole, høsten 2009.

John Heaton og Deborah Lucas. The importance of investor heterogeneity and financial market imperfections for the behavior of asset prices. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 42:1 – 32, 1995.

John Heaton og Deborah J. Lucas. Evaluating the effects of incomplete markets on risk sharing and asset pricing. *The Journal of Political Economy*, 104(3):443–487, 1996.

Miles S. Kimball. Precautionary saving in the small and in the large. *Econometrica*, 58(1):53–73, 1990.

Narayana R. Kocherlakota. Disentangling the coefficient of relative risk aversion from the elasticity of intertemporal substitution: An irrelevance result. *The Journal of Finance*, 45(1):175–190, 1990.

Narayana R. Kocherlakota. The equity premium: It's still a puzzle. *Journal of Economic Literature*, 34(1):42–71, 1996.

Haitao Li og Yuewu Xu. Survival bias and the equity premium puzzle. *Journal of Finance*, 57(5):1981–1995, October 2002.

Robert E. Lucas, Jr. Asset prices in an exchange economy. *Econometrica*, 46(6):1429–1445, 1978.

N. Gregory Mankiw og Stephen P. Zeldes. The consumption of stockholders and nonstockholders. *Journal of Financial Economics*, 29(1):97 – 112, 1991.

Ellen R. McGrattan og Edward C. Prescott. Taxes, regulations and asset prices. Nber workin papers, National Bureau of Economic Research, Inc, 2001.

Rajnish Mehra og Edward C. Prescott. The equity premium: A puzzle. *Journal of Monetary Economics*, 15(2):145–161, 1985.

Rajnish Mehra og Edward C. Prescott. The equity risk premium: A solution? *Journal of Monetary Economics*, 22(1):133–136, 1988.

Rajnish Mehra og Edward C. Prescott. The equity premium in retrospect. Working Paper 9525, National Bureau of Economic Research, March 2003.

Rajnish Mehra og Edward C. Prescott. The equity premium: ABCs. In Rajnish Mehra og Edward C. Prescott, editors, *The Handbook of the Equity Risk Premium*, pages 1–36. Elsevier, 2008.

Jonathan A. Parker. Consumption risk and expected stock returns. *The American Economic Review*, 93(2):376–382, 2003.

George Pennacchi. *Theory of Asset Pricing.* Pearson Education, 2007.

Monika Piazzesi, Martin Schneider, og Selale Tuzel. Housing, consumption, and asset pricing. NBER Working Papers 12036, National Bureau of Economic Research, Inc, February 2006.

John W. Pratt. Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica*, 32(1/2):122–136, 1964.

Thomas A. Rietz. The equity risk premium: A solution. *Journal of Monetary Economics*, 22(1):117–131, 1988.

Mark Rubinstein. The valuation of uncertain income streams and the pricing of options. *The Bell Journal of Economics*, 7(2):407–425, 1976.

Robert Shiller. Long term stock, bond, interest rate and consumption data, 2009.

Jeremy J. Siegel og Richard H. Thaler. Anomalies: The equity premium puzzle. *The Journal of Economic Perspectives*, 11(1):191–200, 1997.

Eivind Stensholt. Emner i algebra og diskret matematikk. Norges Handelshøyskole, 2002.

Knut Sydsæter. *Matematisk analyse.* Gyldendal Akademisk, 2000.

Knut Sydsæter, Arne Strøm, og Peter Bereck. *Matematisk formelsamlig for økonomer.* Gyldendal Akademisk, 1998.

Philippe Weil. The equity premium puzzle and the risk-free rate puzzle. *Journal of Monetary Economics*, 24(3):401–421, November 1989.

Philippe Weil. Equilibrium asset prices with undiversifiable labor income risk. NBER Working Papers 3975, National Bureau of Economic Research, Inc, January 1992.

Martin L. Weitzman. Subjective expectations and asset-return puzzles. *The American Economic Review*, 97(4):1102–1130, 2007.